Э1
Е7-239

Московский государственный технический университет
им. Н.Э.Баумана

О.Н.Агеев, П.В.Храпов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания к решению задач

Под редакцией Р.С.Исмагилова

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана

1997

ББК 22.I6
А23

Рецензент А.В.Сафонов

А23 Агеев О.Н., Храпов П.В. Функциональный анализ: Методические указания к решению задач / Под ред. Р.С.Исмагилова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997 – 84 с.

Изложены краткие теоретические сведения из теории метрических, топологических, нормированных и гильбертовых пространств, линейных операторов и функционалов, принцип сжимающих отображений, интеграл Лебега и задачи по этим разделам. Для м... решения, предложены задачи для самос... изучающих дисциплину "Прикладн...

4989R
Агеев О.Н.
Функциональный
31.10.01 12263

ББК 22.I6

й литературы

ич Агеев
ич Храпов

й анализ

Н.Г.Ковалевская
оролева
Малютина

умана, 1997

т 60х84/I6. Бумага тип. № 2.
Уч.-изд.л. 4,73.
Заказ № 301 С

Н.Э.Баумана,
.Э.Баумана.
уманская, 5.

Б-ка МГТУ им. Н.Э. Баумана
4989R
Ретрофонд

51
А-233

ВВЕДЕНИЕ

Цель данных методических указаний – полное усвоение студентами основных понятий, методов функционального анализа и выработка практических навыков решения задач по данному курсу. В пособие вошли следующие главы: метрические пространства, линейные функционалы и линейные операторы. Для удобства читателя в приложении приведена таблица основных пространств и их свойств.

При написании пособия авторы стремились охватить основные разделы, которые являются неотъемлемой частью функционального анализа, а также те, которые наиболее часто встречаются в прикладных задачах. Каждый раздел снабжен кратким введением, состоящим из определений и основных теорем. В пособии имеется большое количество задач с подробным объяснением решения. Есть как теоретические задачи для более полного усвоения новых понятий, так и практические, имеющие прикладную направленность. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Предполагается знакомство читателя с предварительными сведениями по теории множеств и теории меры. Отметим пособие О.Н.Агеева "Элементы теории множеств и теории меры" (М., 1995), где эта часть функционального анализа подробно изложена.

I. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

I.I. Определение и примеры

Определение. Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества (пространства) X элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x,y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ (аксиома треугольника).

П р и м е р 1. Пространство изолированных точек с метрикой

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\ x,y\in X.\end{cases}$$

П р и м е р 2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

П р и м е р 3. Стандартное n-мерное арифметическое евклидово пространство R^n и

$$\rho(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}, \quad \vec{x},\vec{y}\in R^n.$$

Выполнение аксиом 1 и 2 очевидно. Выполнение аксиомы 3 проверялось в курсе линейной алгебры.

П р и м е р 4. Пространство $l_2=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots):$

$$:\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty\}, \quad \rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}.$$

Неравенство треугольника доказывается предельным переходом при $n\to\infty$ из неравенства треугольника для R^n.

П р и м е р 5. Пространство R_1^n и

$$\rho_1(\vec{x},\vec{y})=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|, \quad \vec{x},\vec{y}\in R^n.$$

Проверим выполнение аксиомы 3:

$$\rho_1(x,z)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|=\sum_{k=1}^{n}|(x_k-y_k)+(y_k-z_k)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k-z_k|=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z).$$

П р и м е р 6. Пространство R_∞^n и

$$\rho_\infty(\vec{x},\vec{y})=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|, \quad \vec{x},\vec{y}\in R^n.$$

Проверим выполнение аксиомы 3:

$$\rho_\infty(\vec{x},\vec{z})=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-z_k|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|(x_k-y_k)+(y_k-z_k)|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k-z_k|=\rho_\infty(\vec{x},\vec{y})+\rho_\infty(\vec{y},\vec{z}).$$

П р и м е р 7. Пространство $C[a,b]$ непрерывных функций с метрикой

$$\rho(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|g(t)-f(t)|;\quad f,g\in C[a,b].$$

Это стандартная метрика в пространстве непрерывных функций.

П р и м е р 8. Пространство непрерывных функций $C_2[a,b]$ с квадратичной метрикой

$$\rho(f,g)=\Big[\int_a^b(g(t)-f(t))^2dt\Big]^{1/2};\quad f,g\in C_2[a,b].$$

Выполнение аксиомы треугольника следует из интегрального неравенства Коши – Буняковского

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt\leqslant\Big(\int_a^b f^2(t)dt\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b g^2(t)dt\Big)^{1/2}.$$

П р и м е р 9. Множество m всех ограниченных последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ действительных чисел и

$$\rho(x,y)=\sup_k|y_k-x_k|.$$

П р и м е р 10. Пространство R_p^n и

$$\rho_p(\vec{x},\vec{y})=\Big(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\Big)^{1/p},\quad p\geqslant 1.$$

Аксиома треугольника, которую нам надо проверить, примет вид

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\Big)^{1/p}, \quad (*)$$

где $a_k=y_k-x_k$, $b_k=z_k-y_k$.

Неравенство (ж) – это так называемое неравенство Минковского. Доказательство неравенства Минковского основано на неравенстве Гельдера:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>0$.

Напишем интегральное неравенство Гельдера:

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

П р и м е р II. Пространство

$$l_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\},$$

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Задачи

1. Найти расстояние между функциями

$f(t)=t+1$ и $g(t)=t^2+2t-3$

а) в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \max_{[0,1]} |f(t)-g(t)|,$$

б) в пространстве непрерывных функций $C_2[0,1]$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

2. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Доказать, что функции

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \quad \rho_2(x,y) = \ln[1+\rho(x,y)],$$

$$\rho_3 = \min\{1, \rho(x,y)\}$$

также являются метриками.

3. Найти расстояние между элементами

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \quad \text{и} \quad y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$$

а) в пространстве l_2;

б) в пространстве l_3;

в) в пространстве m.

4. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса лежать строго внутри шара меньшего радиуса?

5. Является ли метрическим пространством множество $X=R$, если

а) $\rho(x,y) = |\sin(x-y)|$,

б) $\rho(x,y) = |\cos x - \cos y|$.

1.2. Сходимость. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества. Сепарабельность. Полные метрические пространства

Определение. Последовательность $\{x_n\} \in X$ сходится к $x \in X$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ такое, что $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Определение. Точка $x \in X$ называется предельной("предельной") точкой множества $M \subseteq X$, если существует последовательность $\{x_n\} \in M \setminus x$, $(\{x_n\} \in M)$, сходящаяся к x.

Совокупность всех"предельных"точек множества M называется замыканием множества M и обозначается $[M]$.

П р и м е р 1. Множество $M=(a,b) \subseteq R$, $[M]=[a,b]$.

П р и м е р 2. Множество $M=\{x \in (a,b) : x \in Q$ – множеству рациональных чисел$\}$, $[M]=[a,b]$.

Свойства операции замыкания:

1) $M \subseteq [M]$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) если $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$;

4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Определение. Множество M, лежащее в метрическом пространстве X, называется замкнутым, если $M = [M]$.

Определение. Точка x – внутренняя точка M, если существует ε-окрестность точки x, целиком лежащая в M. Множество, все точки которого внутренние, называется открытым.

Можно дать другое определение открытого множества: множество M открыто, если $M = X \setminus F$, где X – все пространство; F – замкнутое множество. При этом $\varnothing$ и все пространство X одновременно и открытые, и замкнутые множества.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной, если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ такое, что $\forall n, m > N_\varepsilon \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Определение. Если в пространстве X любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется полным.

Определение. Пусть A и B – два множества в метрическом пространстве X. Множество A называется плотным в B, если $B \in [A]$. Множество A называется всюду плотным в X, если $[A] = X$, где X – все пространство.

Определение. Пространство, в котором имеется счетное всюду плотное множество, называется сепарабельным.

Задачи

1. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

б) $y_n(t) = t^n - t^{2n}$.

2. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = t^{n+1}/(n+1) - t^{n+2}/(n+2)$$

в пространстве а) $C[0,1]$, б) $C^1[0,1]$ с метрикой

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t) - y'(t)|.$$

3. Доказать, что множество E всех непрерывных функций f на $[0,1]$, удовлетворяющих для всех $x \in [0,1]$ неравенствам $A < f(x) < B$, является открытым множеством в пространстве $C[0,1]$.

4. Построить последовательность открытых множеств в R, пересечение которых не является открытым.

5. Доказать, что множество всех действительных чисел R – сепарабельное пространство.

6. Доказать, что пространство ограниченных последовательностей

$$m = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sup_i |x_i| < \infty \}$$

является несепарабельным пространством.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{M}$ – множество всевозможных последовательностей, состоящих из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуум (так как между ними и подмножествами натурального ряда можно установить взаимно однозначное соответствие или так как каждую точку на $[0,1]$ в двоичной системе можно записать в виде бесконечной последовательности 0 и 1 взаимно однозначно), и расстояния между ними равны 1. Окружим каждую из этих точек открытым шаром радиусом 1/2. Они (шары) не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в m, то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы по одной точке этого множества, следовательно, оно не может быть счетным.

7. Пусть $X = (a,b) \subset R$, $\rho = x,y) = |x - y|$. Доказать, что X – неполное пространство.

8. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой:

а) $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$;

в) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$.

Если нет, то какие элементы необходимо добавить, чтобы пространство стало полным?

9. Каким условиям должна удовлетворять определенная на R непрерывная функция $u=f(v)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства $\rho(x,y)=|\ f(x)-f(y)\ |$?

Ответ: функция $u=f(v)$ должна быть монотонной.

10. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $u=f(v)$, чтобы в метрике $\rho(x,y)=|\ f(x)-f(y)|$ вещественная прямая была полным метрическим пространством?

Ответ: функция $u=f(v)$ должна быть монотонной, а область ее значений должна совпадать с R.

11. Проверить полноту и сепарабельность пространства непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, т.е. $C[a,b]$, но в метриках

$$\rho_1(f,g)=\sup_x|\ f(x)-g(x)|,\ \rho_2(f,g)=\int_a^b|\ f(x)-g(x)\ |\,dx.$$

Решение. В силу теоремы Вейерштрасса множество многочленов всюду плотно относительно ρ_1, а значит, и ρ_2. Счетным всюду плотным множеством будут многочлены с рациональными коэффициентами в обоих случаях.

Очевидно, что пространство $C[a,b]$ является полным по метрике ρ_1. (Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.)

Пусть

$$c=\frac{a+b}{2},\ f_n(x)=\begin{cases} 1, & c+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant b,\\ -1, & a\leqslant x\leqslant c-\frac{1}{n},\\ n(x-c), & c-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant c+\frac{1}{n}.\end{cases}$$

Последовательность $f_n(x)$ является фундаментальной в метрике ρ_2. При этом

$$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)=\begin{cases} 1, & c<x\leqslant b,\\ -1, & a\leqslant x\leqslant c,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Однако $f(x)$ – разрывная функция. Следовательно, пространство $C[a,b]$ не является полным в метрике ρ_2.

12. Проверить выполнение аксиомы треугольника в следующих метрических пространствах:

а) l_p ; б) m ; в) $C[a,b]$; г) $L_p[a,b]$.

13. Рассмотрим множество отрезков Δ на прямой с метрикой $\rho(\Delta_1,\Delta_2)=|\ \Delta_1\ |+|\ \Delta_2\ |-2\,|\ \Delta_1\cap\Delta_2\ |$.

Доказать, что это пространство не является полным, и найти пополнение.

Решение. Нетрудно убедиться, что если $\{\Delta_n\}$ – фундаментальная последовательность, то возможны два варианта:

а) $\exists\, c>0,\ \ \exists\, N$ такие, что $\forall\, n>N\ \ |\ \Delta_n\ |>c$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}|\ \Delta_n\ |=0$.

В случае б) последовательность не имеет предела. Пополним пространство одной точкой x. Пусть $\rho(x,\Delta)=|\ \Delta\ |$. Функция ρ в пополненном пространстве есть метрика. В случае б) последовательность $\{\Delta_n\}$ сходится к x. В случае а) концы отрезков как точки в R сходятся. Отрезок с концами в предельных точках – искомый предел последовательности $\{\Delta_n\}$.

14. Доказать, что пространство многочленов в метрике $\rho(P,Q)=\sum\limits_i c_i$, где $P(x)-Q(x)=\sum\limits_i c_i x^i$, не является полным.

Решение. Пусть $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$. Последовательность $P_n(x)$ фундаментальна в метрике ρ, но не сходится ни к какому многочлену (она сходится к e^x).

1.3. Принцип сжимающих отображений

Определение. Пусть X – метрическое пространство. Отображение A пространства X в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\alpha\in(0,1)$, что для любых $x,y\in X$

$$\rho(Ax,By)\leqslant\alpha\rho(x,y).$$

Точка x^* называется неподвижной точкой отображения A, если $Ax^*=x^*$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространст-

ве X, имеет одну и только одну неподвижную точку x^*.
При этом

$$\rho(x^*, x^{(n)}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \rho(x^{(0)}, Ax^{(0)})\, x^{(n)} = A^n x^{(0)}.$$

П р и м е р. Рассмотрим отображение $\vec{y} = A(\vec{x})$ n-мерного пространства в себя, задаваемое системой равенств:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если A является сжимающим отображением, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$, где $A = (a_{ij})$ – матрица $n \times n$.

При каких условиях отображение будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве.

Рассмотрим три варианта.

а) Пространство R^n_∞, где $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$,

$$\rho(\vec{y}', \vec{y}'') = \max_{1\leq i\leq n} |y_i' - y_i''| = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j' - x_j''| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n} |x_j' - x_j''| \leq$$

$$\leq \rho(\vec{x}', \vec{x}'') \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Отсюда вытекает достаточное условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

т.е. сумма модулей элементов в любой строке не превосходит единицы.

б) Пространство R^n_1, где $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,

$$\rho(\vec{y}', \vec{y}'') = \sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j' - x_j''| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j' - x_j''| \leq$$

$$\leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \rho(\vec{x}', \vec{x}'').$$

Отсюда вытекает условие сжимаемости

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е. сумма модулей элементов в любом столбце не превосходит единицы.

в) Евклидово пространство R^n_2, где $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

На основании неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\rho^2(\vec{x}', \vec{x}'') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k' - x_k'')^2 \right) \right] = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(\vec{x}', \vec{x}'').$$

Отсюда вытекает условие сжимаемости

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leq \alpha < 1.$$

Если матрица A удовлетворяет хотя бы одному из трех перечисленных условий, то систему уравнений $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$ можно решить методом последовательных приближений (согласно принципу сжимающих отображений).

Ни одно из условий не является необходимым, чтобы применить метод последовательных приближений.

Задачи

1. Рассмотреть оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \lambda \int_0^t x(\tau) d\tau + 1 .$$

Доказать, что при $|\lambda| < 1$ оператор является сжимающим в $C[0,1]$. Найти неподвижную точку этого оператора, т.е. решение интегрального уравнения $x(t) = \lambda \int_0^t x(\tau) d\tau + 1$.

Решение. Докажем, что при $|\lambda| < 1$ оператор является сжимающим в $C[0,1]$:

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t \in [0,1]} \left| \lambda \int_0^t (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| \max_{t\in[0,1]} \left(\max_{\tau \in [0,t]} |x(\tau) - y(\tau)| \right) t = |\lambda| \rho(x, y)$$

Следовательно, при $|\lambda| < 1$ оператор является сжимающим. Найдем решение интегрального уравнения $x(t) = \lambda \int_0^t x(\tau) d\tau + 1$, т.е. неподвижную точку $x^*(t)$ этого оператора, последовательными итерациями:

$$x^{(0)} \equiv 1 ;$$

$$x^{(1)}(t) = (Ax^{(0)})(t) = \lambda \int_0^t d\tau + 1 = \lambda t + 1;$$

$$x^{(2)}(t) = \lambda \int_0^t (\lambda\tau + 1) d\tau + 1 = 1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2};$$

. . . .

$$x^{(n)}(t) = 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(\lambda t)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{\lambda t}.$$

Следовательно, $x^*(t) = e^{\lambda t}$.

2. Преобразовать следующие системы линейных алгебраических уравнений так, чтобы их можно было решать итерационным методом:

а) $\begin{cases} 2x + y = 2; \\ x - 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 4; \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

Исследовать характер приближения итераций к точному решению.

3. Доказать, что следующие уравнения (или системы уравнений) имеют единственные решения в указанных пространствах:

а) $$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos x_m}{m^2 + n^2 + 16} = 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \in m ;$$

б) $$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{x + y + 2} dy = x, \quad f \in C[0,1].$$

Решение. а) Пусть $A: m \to m$,

$$(Ax)_n = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos x_m}{m^2 + n^2 + 16} .$$

Покажем сначала, что отображение A действительно переводит m в m:

$$\sup_n |(Ax)_n| = \sup_n \left| 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos x_m}{m^2 + n^2 + 16} \right| \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2 + 16} \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + 16} \leq 1 + \int_0^{\infty} \frac{dm}{m^2 + 16} = 1 + \frac{\pi}{8}.$$

Покажем теперь, что оператор A является сжимающим. Тогда неподвижная точка отображения A и будет решением исходного уравнения:

$$\rho(Ax, Ay) = \sup_n |(Ax)_n - (Ay)_n| = \sup_n \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos x_m - \cos y_m}{m^2 + n^2 + 16} \right| \leq$$

$$\leq \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left| 2\sin\frac{x_m+y_m}{2}\sin\frac{x_m-y_m}{2}\right|}{m^2+n^2+16} \leq \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m-y_m|}{m^2+n^2+16} \leq$$

$$\leq \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sup\limits_m |x_m-y_m|}{m^2+n^2+16} = \rho(x,y)\sup_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2+16} \leq$$

$$\leq \rho(x,y)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+16} \leq \rho(x,y)\int_0^{+\infty} \frac{dm}{m^2+16} = \frac{\pi}{8}\rho(x,y).$$

Следовательно, отображение A сжимающее и по теореме у A существует единственная неподвижная точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$, являющаяся решением исходного уравнения.

б) Пусть $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Af)(x) = x - \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+2}\,dy.$$

Покажем, что оператор A является сжимающим:

$$\rho(Af, Ag) = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 \frac{f(y)-g(y)}{x+y+2}\,dy \right| \leq$$

$$\leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 \frac{|f(y)-g(y)|}{x+y+2}\,dy \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 \frac{\max\limits_{\tau\in[0,1]} |f(\tau)-g(\tau)|}{x+y+2}\,dy =$$

$$= \rho(f,g)\max_{x\in[0,1]} \int_0^1 \frac{dy}{x+y+2} = \rho(f,g)\int_0^1 \frac{dy}{y+2} = \rho(f,g)\ln\frac{3}{2}.$$

49898

4. Дана функция $K(t,x,y)$ такая, что существует α такое, что $|K_t'(t,x,y)| \leq \alpha$, $\alpha(b-a) < 1$. Тогда отображение $A: C[a,b] \to C[a,b]$ вида $(Af)(x) = \int\limits_a^b K(f(y),x,y)\,dy$ является сжимающим.

Решение.

$$\rho(Af, Ag) = \max_{x\in[a,b]} |(Af)(x) - (Ag)(x)| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b (K(f(y),x,y) - K(g(y),x,y)]\,dy \right| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b K_t'[t(f,g,y,x); x,y](g(y)-f(y))\,dy \right| \leq$$

$$\leq \rho(f,g)\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K_t'[t(f,g,y,x),x,y]|\,dy \leq \alpha(b-a)\rho(f,g),$$

где $t(f,g,y,x)$ – некоторая функция.

5. Пусть дано отображение $f: R^2 \to R^2$ вида

$$\begin{cases} y_1 = u(x_1, x_2), \\ y_2 = v(x_1, x_2). \end{cases}$$

Матрица Якоби этого отображения:

$$f'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in R^2.$$

Доказать, что если $\|f'(\vec{x})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2} \leq \alpha$ для всех (x_1, x_2), то $\rho(f(\vec{x}'), f(\vec{x}'')) \leq \alpha\rho(\vec{x}', \vec{x}'')$.

Доказательство. Для вектор-функции $\vec{y} = w(\vec{x})$, где $w = (u, v)$, имеем

$$|w(\vec{b}) - w(\vec{a})| = \left| \int_0^1 [w(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))]'\,dt \right| = \left| \int_0^1 f'(\vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a})) \times\right.$$

$$\left.\times (\vec{b} - \vec{a})\,dt \right| \leq \int_0^1 \|f'(\vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}))\| \cdot |\vec{b} - \vec{a}|\,dt \leq \alpha\,|\vec{b} - \vec{a}|,$$

что и требовалось.

6. Доказать, что следующие уравнения имеют единственные решения в указанных пространствах:

а)
$$f(x)+\int_0^1 \frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4}\,dy=1, \quad f\in C[0,1];$$

б)
$$x_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{(m+n)^2+10}=\frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\ldots,$$
$$x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_1.$$

в)
$$x+\frac{1}{4}(\cos 2x-\sin y)=\frac{1}{4};$$
$$y-\frac{1}{5}(\sin 3x+\cos y)=\frac{1}{2}, \quad (x,y)\in R^2.$$

Решение. а) Воспользоваться задачей 4.

б) Пусть $A: l_1\to l_1$,
$$(Ax)_n=\frac{1}{n^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{(m+n)^2+10}.$$

Покажем, что A действительно отображает l_1 в l_1:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(Ax)_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{(m+n)^2+10}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|x_m|}{(m+n)^2+10}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^2+10}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+10}<\infty,$$
если $\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|<\infty$.

Теперь докажем, что оператор A является сжимающим:
$$\rho(Ax,Ay)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(Ax)_n-(Ay)_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{(m+n)^2+10}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m}{(m+n)^2+10}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|x_m-y_m|}{(m+n)^2+10}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|x_m-y_m|\max_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^2+10}\leqslant\rho(x,y)\int_0^{\infty}\frac{dn}{n^2+10}=\rho(x,y)\frac{\pi}{2\sqrt{10}}.$$

в) Решение есть следствие задачи 5.

7. Пусть функция $x(t)=t$ задана и дифференцируема на $[a,b]$ и отображает этот отрезок в себя, причем
$$\max_{[a,b]}|x'(t)|<1.$$

Доказать, что уравнение $x(t)=t$ имеет на $[a,b]$ единственное решение.

8. Рассмотреть уравнение $\alpha t e^t=1$:

а) доказать, что это уравнение имеет единственное решение и что это решение лежит на интервале $(0,1)$;

б) привести уравнение к виду, пригодному для составления итераций, и определить число итераций, необходимых для того, чтобы приближенное решение отличалось от точного не более чем на 0,001, если в качестве начального приближения принято $t_0=0$.

9. Доказать, что отображение $\Phi: R\to R$, $\Phi(t)=t^3$ является сжимающим на шаре $S_r(0)=\{t\in R: |t|\leqslant r\}$, где $r<\frac{1}{\sqrt{3}}$, но не является сжимающим в отрезке $[-1,1]$.

10. Рассмотреть уравнение $t^5+t+1=0$, $t\in R$:

а) доказать, что это уравнение имеет единственный вещественный корень и найти отрезок, на котором он лежит;

б) привести уравнение к такому виду, чтобы его можно было решать итерационным методом;

в) найти число итераций, необходимых для нахождения корня с погрешностью, не превышающей 0,001;

г) составить и реализовать на компьютере программу для нахождения приближенного решения, выводя на печать результат каждой итерации.

II. Доказать, что при $0 \le \alpha \le 1$ итерации

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(x_n^2 - \alpha), \quad x_0 = 0, \quad n \in N,$$

сходятся к $\sqrt{\alpha}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \frac{1}{2}(x^2 - \alpha)$. Покажем, что она является сжимающим отображением $[\alpha/2, 1]$ в себя:

$$f(x) - f(y) = (x-y)(1 - \frac{1}{2}(x+y)].$$

Заметим, что если $x, y \in [\frac{\alpha}{2}, 1]$, то

$$0 \le 1 - \frac{1}{2}(x+y) \le 1 - \alpha.$$

Поэтому $f(x)$ монотонно возрастает,

$$\frac{\alpha}{2} \le f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4} - \alpha\right) = \alpha - \frac{\alpha^2}{8} \le 1,$$

$$\frac{\alpha}{2} \le f(1) = 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \le 1,$$

и переводит отрезок $[\alpha/2, 1]$ в себя.

Следовательно, отображение $f: R \to R$ сжимающее и у него существует единственная неподвижная точка x^*. Поскольку неподвижная точка x^* единственная и

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}[(\sqrt{\alpha})^2 - \alpha], \text{ то } \quad x^* = \sqrt{\alpha}.$$

I2. Пусть отображение $\Phi(x)$ переводит замкнутое множество $Q \subset X$ в себя и при некотором натуральном m отображение

$$\Phi^m(x) = \underbrace{\Phi[\Phi[\ldots[\Phi(x)]}_{m \text{ раз}}\ldots]]$$

является сжимающим на Q. Доказать, что в Q существует единственная неподвижная точка отображения $\Phi(x)$ и что итерации $x_n = \Phi(x_{n-1}), n \in N$ сходятся к ней при любой $x_0 \in Q$.

Решение. Отображение $\Psi = \Phi^m$ имеет единственную неподвижную точку x^*. Но Ψ и Φ перестановочны на Q, поэтому $\Phi(x^*)$- также неподвижная точка Ψ, т.е. $\Phi(x^*) = x^*$. Если $\bar{x}$ - еще одна неподвижная точка Φ, то $\Psi(\bar{x}) = \Phi^m(\bar{x}) = \bar{x}$, т.е. $\bar{x} = x^*$.

I.4. Компактность в метрических пространствах. Теорема Арцела. Понятие ε-энтропии

Определение I. Множество $K \subseteq X$ называется компактным, если любое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. (Множество K покрыто открытыми множествами, если K содержится в объединении этих множеств.)

Определение 2. Множество $K \subseteq X$ называется предкомпактным, если его замыкание компактно.

Определение 3. Множество $K \subseteq X$ называется предкомпактным, если любая его бесконечная часть содержит фундаментальную последовательность.

Определения 2 и 3 равносильны.

Определение 4. Множество $B \subseteq X$ называется ε-сетью для множества K, если для всякой точки $x \in K$ найдется точка $y \in B$ такая, что $\rho(x,y) \le \varepsilon$.

Теорема (критерий Хаусдорфа). Множество $K \subseteq X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ у него существует конечная ε-сеть.

П р и м е р I. В R^n понятие предкомпактности совпадает с обычной ограниченностью. В этом случае данное множество можно заключить в достаточно большой куб, куб разбить на кубики с ребром ε. Вершины кубиков будут образовывать конечную $\frac{\sqrt{n}}{2}\varepsilon$-сеть в исходном кубе, а следовательно, и в любом подмножестве куба.

П р и м е р 2. Единичная сфера S в l_2 - пример ограниченного, но не компактного множества (множество называется ограниченным, если его можно поместить в шар конечного радиуса).

Рассмотрим бесконечный набор точек из S:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots);$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots);$$
$$\ldots \ldots \ldots$$

Очевидно, что $\rho(e_i, e_j) = \delta_{ij}\sqrt{2}$. Поэтому в S не может быть конечной ε-сетки.

С помощью критерия Хаусдорфа выводятся критерии компактности для тех или иных конкретных метрических пространств.

Теорема (критерий компактности в $C[a,b]$, или теорема Арцела). Множество $\Phi \subset C[a,b]$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно:

1) ограничено, т.е. существует $c > 0$ такое, что

$$\forall x \in [a,b],\ \forall \varphi \in \Phi,\ |\varphi(x)| < c.$$

2) равностепенно непрерывно: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для всех пар точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, разность $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon\ \ \forall \varphi \in \Phi$.

Теорема (критерий компактности в l_p). Множество M элементов $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p$ предкомпактно тогда и только тогда, когда:

1) оно ограничено;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p$ существует равномерно относительно $x \in M$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$, $\forall x \in M$ выполнено

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

Определение. Диаметром множества M в пространстве (X,ρ) называют число d, определенное по формуле

$$d(M) = \sup_{x,y} \{\rho(x,y) : x \in M,\ y \in M\}.$$

Определение. ε-энтропией множества M /обозначение $\mathcal{H}_\varepsilon(M)$/ в пространстве (X, ρ) называют двоичный логарифм от наименьшего числа множеств диаметром не более чем ε, образующих покрытие множества M, т.е.

$$\mathcal{H}_\varepsilon(M) = \log_2 \min_N \{N : \exists M_1, \dots, M_N : d(M_i) \le \varepsilon,\ i = 1,\dots,N,\ M \subseteq \bigcup_i M_i\}.$$

Пример 3. а) Найти ε-энтропию отрезка $[a,b]$ в пространстве R^1. б) Показать, что если M – куб с единичной стороной и V_1 – объем шара с единичным радиусом в R^n, то

$$-\log_2 V_1 - n \log_2 \varepsilon \le \mathcal{H}_\varepsilon(M) \le n \log_2\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right] + 1\right).$$

Решение. а) Разобьем $[a,b]$ на отрезки длиной ε, и, возможно, остаток отрезка длиной меньше ε. Они образуют наименьшее по количеству требуемое покрытие отрезка $[a,b]$, так как точки $a,\ a + \varepsilon + \frac{1}{n},\ a + 2\varepsilon + \frac{2}{n}, \dots$ для любого n лежат в разных множествах произвольного покрытия с диаметрами не более чем ε, а при достаточно большом n этих точек в отрезке $[a,b]$ в точности столько, сколько отрезков в первоначальном разбиении.

б) Куб с ребром $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right] + 1\right)$ разобьем на $\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right] + 1\right)^n$ кубов с ребром $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Так как ребро большего куба больше или равно 1, то маленькие кубы образуют покрытие куба с ребром 1, имеют диаметр не более чем ε. Отсюда следует оценка сверху. Оценка снизу следует из того, что объем множества с диаметром не более чем ε, не больше $\varepsilon^n V_1$ (объем шара с радиусом ε) и объем куба не больше суммы объемов $V^{(i)}$ покрывающих его множеств (т.е. $1 \le V^{(1)} + \dots + V^{(n)} \le n\, \varepsilon^n V_1$).

Задачи

1. Рассмотреть множество

$$\Pi \subset l_2,\ \Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots) : |x_1| \le 1,\ |x_2| \le \frac{1}{2}, \dots, |x_n| \le \frac{1}{2^n}, \dots\} -$$

гильбертов кирпич. Доказать, что Π – компактное множество.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots) \in \Pi$ сопоставим

$$x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \Pi^* \subset \Pi,$$

$$\rho(x,x^*) = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2\Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}\Big)^{1/2} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко заметить, что множество Π^* лежит в n-мерном подпространстве пространства l_2 и ограничено, следовательно, предкомпактно. Выберем в Π^* конечную $\varepsilon/2$-сеть. Она будет ε-сетью для всего Π. Замкнутость Π очевидна.

2. Пусть M – равномерно ограниченное множество функций в пространстве $C[a,b]$, т.е. существует $K>0$ такое, что $|f(x)| \le K$ для всех $f\in M, x\in[a,b]$. Доказать следующее:

а) множество N функций вида $y(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau$, где $x(t)\in M$, предкомпактно;

б)* его замыкание состоит из функций, удовлетворяющих условию Липшица $|y(t_1)-y(t_2)| \le K|t_1-t_2|$.

Решение. а) Проверим выполнение условий 1, 2 теоремы Арцела:

$$|y(t)| = \Big|\int_a^t x(\tau)d\tau\Big| \le \max_{[a,b]}|x(\tau)|\int_a^t d\tau \le$$
$$\le (b-a)\max_{[a,b]}|x(\tau)| \le K(b-a);$$
$$|y(t_1)-y(t_2)| = \Big|\int_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau\Big| \le \max_{[a,b]}|x(\tau)|\cdot|t_1-t_2| \le$$
$$\le K|t_1-t_2|,$$

и можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/K$.

3. Доказать, что множество

$$A = \Big\{f\in C[0,1]: f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{x^2+n},\ |b_n| \le \frac{1}{n},\ n\in N\Big\},$$

предкомпактно.

Решение. Проверим выполнение условий 1, 2 теоремы Арцела:

$$|f(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty;$$

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\frac{|x_1-x_2|(x_1+x_2)}{(x_1^2+n)(x_2^2+n)} \le$$
$$\le 2|x_1-x_2|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n^2} \le \mathrm{const}\,|x_1-x_2|.$$

4. Доказать, что в $C[0,1]$ множество многочленов степени не выше n, для которых $|P(x)|\le K$ является предкомпактным множеством.

5. Будет ли предкомпактным множеством в пространстве $C[a,b]$ множество всех степеней x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$?

6. При каких условиях, наложенных на последовательность $\{a_k\}$, множество элементов $\Big\{x\in l_2: \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{x_k}{a_k}\Big|^2 < 1\Big\}$ будет предкомпактным.

7. Компактны ли следующие множества в пространстве $C[0,1]$:

а) $x_n(t) = t^n$, $n\in N$;

б) $x_n(t) = \sin nt$, $n\in N$;

в) $x_n(t) = \sin(n+t)$, $n\in N$;

г) $x_\alpha(t) = \sin\alpha t$, $\alpha\in R$;

д) $x_\alpha(t) = \sin\alpha t$, $\alpha\in[1,2]$;

е) $x_\alpha(t) = \mathrm{arctg}\,\alpha t$, $\alpha\in R$;

ж) $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha\in R$, $\alpha\ge 0$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) нет; ж) да.

8. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$|x(a)| \le K_1,\quad \int_a^b |x'(t)|\,dt \le K_2$$

(постоянная $K_1\ge 0$, постоянная $K_2\ge 0$), является предкомпактным в пространстве $C[a,b]$.

Указание. $|x(t_1)-x(t_2)| = \Big|\int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt\Big| \le$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} 1\cdot|x'(t)|\,dt \leqslant \sqrt{|t_1-t_2|}\ \sqrt{\int_{t_1}^{t_2}|x'(t)|^2dt}.$$

9. Доказать предкомпактность следующих множеств:

множества функций $f\in C[0,1]$, представимых в виде

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n\sin nx}{n^2+x^2}$, $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$, $n=1,2,\dots$;

б) $f(x)=\int\limits_0^1\dfrac{\varphi(y)}{x^2+y^2+1}\,dy$, $|\varphi(y)|\leqslant 1$, $y\in[0,1]$;

множества векторов $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_1$, удовлетворяющих условиям:

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,|x_n|\leqslant 1$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2|x_n|^2\leqslant 1$;

множества векторов $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_1$, имеющих вид

д) $x_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{a_m}{m^2+n^2+1}$, $n=1,2,\dots$, $|a_m|<\dfrac{1}{m^2}$;

е) $x_n=\int\limits_0^1\dfrac{\varphi(y)}{n^2+y^2}\,dy$, $n=1,2,\dots$, $\varphi\in C[0,1]$, $|\varphi(y)|\leqslant 1$, $y\in[0,1]$.

Указание. В п. г) воспользоваться неравенством Коши - Буняковского.

10.* Пусть X - метрическое пространство без изолированных точек (т.е. точек, являющихся открытыми множествами). Доказать, что если любая непрерывная функция на X равномерно непрерывна, то X является компактным.

1.5. Понятие топологического пространства

Можно определить на множестве X систему открытых множеств непосредственно с помощью аксиом, не вводя в X метрику. Этот путь приведет к значительно более общему понятию топологического пространства.

Определение. Топологией в множестве X называется любая система τ его подмножеств, удовлетворяющая аксиомам:

1) X , $\varnothing\in\tau$,

2) объединение $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) набора множеств A_α из τ и пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ любого конечного набора множеств A_α из τ принадлежит τ .

Определение. Топологическим пространством называется пара (X,τ), где τ - топология в множестве X .

Определение. Открытыми множествами топологического пространства (X,τ) называются все элементы из τ. Замкнутыми множествами называются все множества, дополнительные к открытым (т.е. вида $X\setminus A$, где A - открыто).

Сравнение топологий. Рассмотрим два топологических пространства (X,τ_1) и (X,τ_2). Скажем, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2 (обозначение $\tau_1\geqslant\tau_2$), если система множеств τ_1 содержит любое множество из τ_2 ($\tau_2\leqslant\tau_1$). Также говорят, что топология τ_2 слабее, чем τ_1. Если $\tau_2\geqslant\tau_1$ и $\tau_2\leqslant\tau_1$, то топологии τ_1 и τ_2 совпадают.

П р и м е р 1. Показать, что любое метрическое пространство является топологическим.

Решение. Проверим аксиому 2. Пусть элемент a из $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, где A_α - открытые множества (в метрике). Тогда $a\in A_{\alpha_0}$ для некоторого α_0. Поэтому существует открытый шар U с центром в a, лежащий в A_{α_0}, а, следовательно, U содержится и в $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$. Поэтому $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ - открытое множество.

Если элемент a из $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$, где A_α - открытые множества, то $a\in A_\alpha$ для любого α . Поэтому существует шар с центром в точке a с радиусом, зависящим от α , целиком лежащий в A_α. Но тогда шар с наименьшим радиусом содержится во всех A_α, т.е. множество $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ открыто.

Определение. Топологическое пространство (X,τ) метризуемо, если существует такая метрика ρ , что система открытых множеств для нее есть τ .

П р и м е р 2. Доказать, что топологическое пространство $([0,1],\tau)$, где τ - система подмножеств вида $[0,1]\setminus B$,

(B конечно или счетно), дополненная $\varnothing$, не метризуемо.

Доказательство. Ясно, что два любых открытых непустых множества указанного топологического пространства имеют непустое пересечение. Между тем, в произвольном метрическом пространстве (имеющем более одной точки) можно указать два открытых непустых множества с пустым пересечением: в качестве таковых достаточно взять окрестности $\{x : d(x, x_i) < \varepsilon\}$, $i = 1, 2$, двух точек x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$.

Определение. Топологическое пространство (X , τ) называется дискретным, если любая точка из X является открытым множеством.

П р и м е р 3. Доказать, что любое множество в дискретном пространстве одновременно открыто и замкнуто.

Действительно, достаточно использовать аксиому 2.

Определение. Система открытых множеств образует базу в топологическом пространстве, если любое открытое множество есть объединение элементов из базы.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет II аксиоме счетности, если оно имеет счетную базу.

Определение. В топологическом пространстве последовательность точек x_n сходится к точке x_0, если любое открытое множество, содержащее x_0, содержит все точки последовательности, за исключением конечного числа.

Определение. Топологией, порожденной системой множеств B, называется минимальная топология τ , содержащая B , т.е. $\tau \leq \tau_1$ для любой топологии τ_1, удовлетворяющей условию $B \subseteq \tau_1$.

Теорема. Система подмножеств B_α множества X образует базу топологического пространства, порожденного этой системой, если имеют место свойства:

1) $\forall x \in X \quad \exists \alpha : \; x \in B_\alpha$;

2) $x \in B_{\alpha_1}$, $x \in B_{\alpha_2} \Rightarrow \exists \alpha_3 : x \in B_{\alpha_3} \subseteq B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$.

Определение. Декартовым произведением топологических пространств (X_α, τ_α), $\alpha \in A$, называется топологическое пространство ($\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, τ), порожденное системой подмножеств

$\prod\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α - открытые множества пространств (X_α, τ_α), совпадающие с X_α , для всех, кроме конечного числа значений α .

Если множество A конечно ($1, 2, \ldots, n$) или счетно ($1, 2, \ldots$), то произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ обычно записывают в виде $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ или $X_1 \times X_2 \times \ldots$.

Задачи

1. Доказать, что в множестве всех ограниченных функций L на отрезке $[0, 1]$ не метризуема топология, порожденная системой множеств

$$N_\varepsilon(x_1, \ldots, x_k, f) = \{ g \in L : \max_i | f(x_i) - g(x_i) | < \varepsilon \}$$

(топология, задающая сходимость последовательности функций как сходимость в каждой точке).

Указание. В этом пространстве, в отличие от метрического, у всех точек f отсутствует такой счетный набор открытых множеств B_i ($f \in B_i \; \forall_i$) , что для любого открытого $B (f \in B)$ для некоторого i $B_i \subseteq B$. Действительно, для $f = 0$ (см. теорему) множества B_i могут иметь вид $N_{\varepsilon_i}(x_1^{(i)}, \ldots, x_{k_i}^{(i)}, f_i)$.

Но $B_i \setminus B \neq \varnothing$ для любого i , где $B = N_\varepsilon(x^{(0)}, 0)$ и $x^{(0)} \neq x_j^{(i)}$ для любых i и j .

2. Доказать, что декартово произведение метрических пространств метризуемо в точности тогда, когда их не более чем счетное число.

Указание. Топология декартового произведения метрических пространств (X_n, ρ_n), $n = 1, 2, \ldots$, задается метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}, \quad \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \ldots) \in X_1 \times X_2 \times \ldots, \\ y = (y_1, y_2, \ldots) \in Y_1 \times Y_2 \times \ldots \end{array}$$

Несчетное произведение не метризуемо (доказательство копирует задачу 1).

3. Доказать, что пространство ограниченных функций на отрезке $[0, 1]$ имеет топологию из задачи 1 и равномерную тополо-

гию, т.е. порожденную множествами

$$N_\varepsilon(f)=\{g\in L : \sup_x |f(x)-g(x)|<\varepsilon\},$$

и не удовлетворяет второй аксиоме счетности. Сравнить эти топологии.

Указание. В равномерной топологии нет счетной базы, так как есть континуум попарно не пересекающихся открытых множеств. Равномерная топология строго сильнее в силу метризуемости: $\rho(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$.

4. Доказать, что на отрезке $[0,1]$ существует только одна метризуемая топология, в которой все множества вида $[0,1]\setminus B$ открыты, где B конечно или счетно (ср. с примером 2).

Решение. В этом пространстве сходятся только тривиальные последовательности (т.е. $x_n=x_0 \ \forall n\in N$). Так как пространство метризуемо, то любая точка есть открытое множество. Следовательно, все подмножества из $[0,1]$ открыты. Это пространство метризуемо, $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$

5. В пространстве l_2 сравнить обычную τ, слабую $\tau_{сл}$ и равномерную топологии, которые порождены (соответственно) следующими системами множеств:

$$N(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,y_2,\dots)\in l_2 : \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2<\varepsilon\};$$

$$N_{сл}(x,\varepsilon,f)=\{y=(y_1,y_2,\dots)\in l_2 : \Big|\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x_i-y_i)\Big|<\varepsilon\};$$

$$N_p(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,y_2,\dots)\in l_2 : \sup_i|x_i-y_i|<\varepsilon\};$$

где

$$x=(x_1,x_2,\dots)\in l_2,$$
$$f=(f_1,f_2,\dots)\in l_2 .$$

Ответ: $\tau\geqslant\tau_p\geqslant\tau_{сл}$.

Указание. Использовать последовательности $\{x^{(n)}\},\{y^{(n)}\}$, где

$$x_i^{(n)}=\begin{cases}1, & i=n;\\ 0, & i\neq n;\end{cases}\quad y_i^{(n)}=\begin{cases}\frac{1}{n}, & i\leqslant n^2;\\ 0, & i>n^2;\end{cases}\quad \begin{matrix}x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\dots)\in l_2;\\ y^{(n)}=(y_1^{(n)},y_2^{(n)},\dots)\in l_2.\end{matrix}$$

I.6. Интеграл Лебега. Пространство интегрируемых функций

Определение. Функция $f(x)$, определенная на подмножестве вещественной прямой, называется измеримой (по Лебегу), если при любом c множество $\{x : f(x)<c\}$ измеримо (по мере Лебега).

Свойства измеримых функций:

I) все интегрируемые по Риману функции измеримы;

2) если функции f и g измеримы, то $f+g$, $|f|$, λf, $f\cdot g$, f/g также измеримы;

3) c – свойство Лузина. Функция f на отрезке $[a,b]$ измерима в точности тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, которая отличается от f только в точках, имеющих меру Лебега меньше ε (т.е. $l\{x : f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$);

4) если последовательность измеримых функций f_n сходится в каждой точке к функции f, то f измерима.

Пример 1. Показать, что функции $\sup_k f_k(x)$ и $\inf_k f_k(x)$ измеримы, если $f_k(x)$ измеримы.

Действительно, так как

$$\{x : \inf_k f_k(x)<c\}=\bigcup_k\{x : f_k(x)<c\},$$

$$\{x : \sup_k f_k(x)>c\}=\bigcup_k\{x : f_k(x)>c\},$$

то левые множества в равенствах измеримы. Осталось заметить, что множество

$$\{x : \sup_k f_k(x)<c\}=\overline{\{x : \sup_k f_k(x)\geqslant c\}}=$$

$$=\overline{\bigcap_n\{x : \sup_k f_k(x)>c+\frac{1}{n}\}},$$

где $\overline{A}$ – множество, дополнительное к A, также измеримо.

Пример 2. Доказать, что если функция $f(x)$ всюду дифференцируема на отрезке $[0,1]$, то $f'(x)$ измерима по Лебегу.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна. Поэтому последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из измеримых функций, где

$$f_n(x)=\frac{f(x+x_n)-f(x)}{x_n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n=0.$$

Но $f_n(x)$ сходится к $f'(x)$ для всех x. Поэтому $f'(x)$ также измерима.

Пример 3. Пусть $f\in C[a,b]$ и $n(c)$ – число таких x, что $f(x)=c$. Доказать, что $n(c)$ измерима по Лебегу (на множестве, где она определена).

Решение. Разобьем полуинтервал $[a,b)$ на 2^k полуинтервала равной длины. Пусть $n_k(c)$ – число тех из них, в которых есть хотя бы одно решение уравнения $f(x)=c$. Функции $n_k(c)$ имеют не более чем конечное число разрывов и измеримы. Очевидно, что

$$n(c)=\sup_k n_k(c).$$

Отсюда следует измеримость $n(c)$.

Определение. Функция называется простой, если она измерима и принимает конечное или счетное число значений.

Теорема I. Функция измерима в точности тогда, когда она есть предел равномерно сходящейся последовательности простых функций.

Определение. Простая функция f, принимающая значения $y_1, y_2, \dots$, называется интегрируемой на множестве A (измеримом), если ряд $\sum_k y_k\, l(A_k)$, где $A_k=\{x\in A: f(x)=y_k\}$, l – мера Лебега, сходится абсолютно. В этом случае сумма ряда называется интегралом Лебега от f по множеству A и обозначается $\int_A f\,dl$.

Определение. Функция f интегрируема (по Лебегу) на множестве A, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций f_n, сходящаяся равномерно на A к f. В этом случае предел $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,dl$ называется интегралом

Лебега (или просто интегралом) от f по множеству A и обозначается $\int_A f\,dl$.

Замечание. В силу теоремы I интегрируемая функция измерима.

Свойства интеграла Лебега:

1) $\int_A dl = l(A)$;

2) $\int_A(\lambda f(x)+g(x))dl=\lambda\int_A f(x)dl+\int_A g(x)\,dl$;

3) $\forall x\ f(x)\geq\varphi(x) \Rightarrow \int_A f\,dl\geq\int_A\varphi\,dl\quad \forall A$;

4) $l(A)=0 \Rightarrow \int_A f\,dl\quad \forall f$;

5) интегралы $\int_A f\,dl$ и $\int_A|f|\,dl$ существуют только одновременно;

6) если $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ /т.е. $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$/ и f интегрируема на A (A_i – измеримые множества), то $\int_A f\,dl=\sum_n\int_{A_n} f\,dl$;

7) если f интегрируема по Риману, то f интегрируема по Лебегу и интегралы совпадают.

Пример 4. Построить функцию, не интегрируемую по Лебегу, но имеющую несобственный интеграл.

Решение. Рассмотрим $\sin x/x$. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно. Поэтому интеграл $\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{y}}{y}\,dy$ сходится условно. Предположим, что функция $\sin x$ не интегрируема по Лебегу. Тогда в силу свойств 5 и 6

$$\int_{[0,1]}|f|\,dl=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}|f|\,dl=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}|f|\,dy.$$

Таким образом получаем противоречие ввиду расходимости последнего ряда.

Определение. Некоторое свойство выполнено почти всюду на множестве E, или для почти всех x, если оно выполнено во всех точках из E, за исключением точек, образующих множество меры 0.

Определение. Две функции f и g называются эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Очевидно, что эквивалентные функции только одновременно измеримы (интегрируемы). Множество интегрируемых по Лебегу функций распадается на классы, каждый из которых содержит все эквивалентные друг другу функции. Определив сложение классов и умножение на число как те же операции для каких-то представителей этих классов, получим, что множество классов образует линейное пространство.

Определение. Пространство $L_1(X)$ – это линейное пространство классов эквивалентности интегрируемых функций с метрикой $\rho(f,g)=\int\limits_X |f-g|\,dl$.

Теорема 2. Пространство $L_1(X)$ является полным и сепарабельным.

П р и м е р 5. Построить функцию, интегрируемую по Лебегу, существенно неограниченную на любом непустом интервале /т.е. $f\notin L_\infty(\Delta)\ \forall\Delta$ /.

Решение. Разобьем отрезок $[0,1]$ на 3 интервала Δ_i равной длины. Пусть

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x \text{ принадлежит среднему интервалу,}\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Каждый Δ_i разобьем на 3^2 интервала Δ_{ij} равной длины. Пусть

$$f_2(x)=\begin{cases}1, & x \text{ принадлежит среднему интервалу из } \Delta_{ij},\\ & j=1,\ldots,9 \text{ при каком-либо } i,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Каждый Δ_{ij} разобьем на 3^3 интервала равной длины и т.д.

Ряд $\sum\limits_i f_i$ сходится по метрике L_1 к некоторой f, так как последовательность фундаментальна:

$$\rho\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i,\ \sum_{i=1}^{m} f_i\Big)=\int\limits_X \Big|\sum_{i=m}^{n} f_i\Big|\,dl \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=m}^{n}\int\limits_X |f_i|\,dl=\sum_{i=m}^{n}3^{-i}<\frac{3}{2\cdot 3^m},\ (m\leqslant n).$$

Очевидно, что функция f искомая.

Определение. Последовательность измеримых функций сходится по мере к $f(x)$, если

$$\forall\delta>0\qquad \lim_{n\to\infty} l\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\delta\}=0.$$

П р и м е р 6. Как связаны для функций из $L_1[0,1]$ следующие утверждения:

1) последовательность $f_n(x)$ сходится к f почти всюду;

2) последовательность $f_n(x)$ сходится к f по мере;

3) последовательность $f_n(x)$ сходится к f по метрике $L_1[0,1]$.

Ответ. В общем случае только так: из утверждения 1) следует 2), из утверждения 3) следует 2).

Все изложенное в данном подразделе имеет место и для функций на общих пространствах с любой мерой.

1.7. Нормированные пространства. Банаховы пространства

Определение. Линейное пространство L называется линейным нормированным пространством, если каждому $x\in L$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x) так, что выполнены следующие три аксиомы:

1) $\|x\|\geqslant 0$, причем $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$ (условие невырожденности нормы);

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ (условие однородности нормы);

3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

П р и м е р. Всякое нормированное пространство становится метрическим, если ввести в нем расстояние $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Если полученное метрическое пространство является полным, то L называется банаховым пространством.

Примеры нормированных пространств:

$$R^n,\ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p};$$

$$C[a,b],\ \|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ x(t)\in C[a,b];$$

$$l_p,\ p\geq 1,\ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p},\ x\in l_p;$$

$$L_p[a,b],\ p\geq 1,\ \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p},\ x\in L_p[a,b].$$

Задачи

1. Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно:

а) пространство $C[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

б) пространство $C^k[a,b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)|;$$

в) пространство $L_\infty[a,b]$ всех существенно ограниченных на $[a,b]$ функций (см. приложение);

г) пространство K непрерывных на вещественной прямой финитных функций (равных нулю вне некоторого интервала, своего для каждой функции) с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Что означает сходимость последовательности в каждом из перечисленных выше пространств?

2. Изобразить единичный замкнутый шар $S_1(0)=\{x : \|x\|_1\leq 1\}$ в пространствах $R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_\infty^2$.

3. Можно ли в множестве R_p^n положить

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

если $p<1$, $m\geq 2$?

Ответ: нет. Положим $x=(1,0,\dots,0)$, $y=(0,1,0,\dots,0)$, тогда для $z=x/2+y/2$ нарушается аксиома треугольника.

4. Доказать следующие неравенства для норм:

а) $\alpha_n \|x\|_{R_2^n} \leq \|x\|_{R_\infty^n} \leq \beta_n \|x\|_{R_2^n}$;

б) $\gamma_n \|x\|_{R_1^n} \leq \|x\|_{R_\infty^n} \leq \delta_n \|x\|_{R_1^n}$;

в) $\varepsilon_n \|x\|_{R_2^n} \leq \|x\|_{R_1^n} \leq \nu_n \|x\|_{R_2^n}$.

Указать наилучшие значения входящих в них положительных постоянных $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n, \varepsilon_n, \nu_n$.

Ответ:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ \beta_n = 1,\ \gamma_n = \frac{1}{n},\ \delta_n = 1,\ \varepsilon_n = 1,\ \nu_n = \sqrt{n}.$$

5. Пусть $\alpha_k>0$, $k=1,2,\dots,n$. Доказать, что нижеследующие функции, определенные на пространстве R^n, являются нормами:

а) $\|x\| = \max\limits_{1\leq k\leq n} (\alpha_k |x_k|)$;

б) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|$;

в) $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|^2\right)^{1/2}$.

6. Доказать, что в пространстве R^n данные функции определяют норму:

а) $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{i} |x_k|^2\right)^{1/2}$;

б) $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right|$.

7. Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – симметричная положительно-определенная матрица. Доказать, что в пространстве R^n нижеследующая функция является нормой:

$$\| x\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\Big)^{1/2}.$$

8. Привести пример последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$, которая принадлежит каждому из пары рассматриваемых пространств и сходится:

а) в m, но не сходится в l_1;

б) в m, но не сходится в l_2;

в) в l_2, но не сходится в l_1;

г) в c_0, но не сходится в l_1;

д) в c_0, но не сходится в l_2.

Ответ. Для а), в), г)

$$x^{(n)} = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{2n}, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+2}, \dots, \frac{1}{2n+n}, 0, 0, \dots);$$

тогда $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ в пространствах m, l_2, c_0, но расходится в пространстве l_1.

Для б), д)

$$x^{(n)} = \big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n^3}, 0, 0, \dots\big);$$

тогда $x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ в пространствах c_0 и m, но расходится в пространстве l_2.

9. Доказать, что при любом $p \geqslant 1$ каждый элемент пространства l_p является и элементом пространства c_0, но элемент $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \dots, \frac{1}{\ln n}, \dots) \in c_0$, но не принадлежит l_p ни при каком $p \geqslant 1$.

10. Доказать, что если рассматривать пространство l_1 как множество в пространстве m, то его замыкание есть c_0.

Указание. Для c_0 и $\overline{l}_1$ проверить, что $c_0 \subseteq \overline{l}_1$ и $\overline{l}_1 \subseteq c_0$. Включение $c_0 \subseteq \overline{l}_1$ вытекает из того, что всякий элемент пространства c_0 можно приблизить, заменяя все его координаты, начиная с некоторого, нулями. Обратное включение – из свойств равномерной сходимости.

11. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$ принять за норму элемента $x(t)$:

а) $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

б) $\|x''\|_{C[a,b]} + \|x\|_{L_2[a,b]}$;

в) $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

г) $|x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{L_2[a,b]}$?

Ответ: во всех случаях можно.

12. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

а) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

б) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

г) $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

д) $\int_a^b |x(t)|\,dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$?

Ответ: а), г), д) – можно; б), в) – нельзя.

13. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$: а) открытым; б) замкнутым?

Ответ: а) Нет. Дополнение к нему не замкнуто. б) Нет. Оно всюду является плотным в пространстве $C[a,b]$ (теорема Вейерштрасса).

14. Множество $A \subseteq X$ называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки A, целиком лежит в A. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество:

а) многочленов степени $n=k$;

б) многочленов степени $n \leq k$;

в) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|\,dt \leq 1;$$

г) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1.$$

Ответ: а) – нет; б), в), г) – да.

15. Доказать, что в пространстве l_2 выпуклыми множествами являются:

а) параллелепипед

$$\{x \in l_2 : x=(x_1, x_2, \ldots),\ |x_n| < 2^{-n+1}\};$$

б) эллипсоид

$$\{x \in l_2 : x=(x_1, x_2, \ldots), \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\}.$$

16. В линейном пространстве многочленов, рассматриваемых на $[a,b]$, положим

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

а) Проверить аксиомы нормы.

б) Определить, будет ли какое-либо из получающихся пространств банаховым?

в) Описать пополнение рассматриваемого пространства по каждой из норм.

Ответ. б) Нет. Последовательность $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, $n \in N$ фундаментальна в обеих нормах, но не сходится в рассматриваемом пространстве. в) Пополнения изометричны соответственно $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$.

17*. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве единичный шар не является компактным.

Предположим противное. Тогда шар O_0 покрывается конечным числом шаров $O_1, \ldots, O_N$ с радиусом $r<1$. Рассмотрим n-мерное подпространство X_n, содержащее центры этих шаров. Пусть $\tilde{O}_i = O_i \cap X_n$, $i=0,1,\ldots,N$. Очевидно, что множества $\tilde{O}_i$ являются шарами в X_n с теми же радиусами. Рассмотрим меру Лебега μ в X_n, нормированную условием $\mu(\tilde{O})=1$. Тогда $\mu(\tilde{O}_i)=r^n$, $i=1,\ldots,N$. В силу включения $\tilde{O} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{O}_i$ имеем $N \cdot r^n \geq 1$. Но при $r<1$ и достаточно большом n это невозможно.

18. Доказать несепарабельность и полноту пространства

$L_\infty[0,1]=\{f(x) \in L_1[0,1] : \exists c : |f(x)| < c$ для почти всех $x\}$

относительно нормы

$$\|f\| = \inf_c \{c : |f(x)| < c \text{ для почти всех } x\}$$

Рассмотрим семейство функций из L_∞, принимающих значения 0 и 1, постоянных на всех интервалах $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, ...

Пространство несепарабельно, так как это семейство не счетно и состоит из элементов, попарные расстояния между которыми $(\rho(f,g) = \|f-g\|)$ равны 1.

Доказательство полноты легко вытекает из равномерной сходимости фундаментальной последовательности f_n на подмножестве A полной меры, т.е. $l([0,1] \setminus A) = 0$, которое можно выбрать одним для всех разностей $f_n - f_m$.

19. Доказать, что нормированное пространство X является банаховым в точности тогда, когда любой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ с условием $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$ сходится в X.

Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и вся последовательность сходится. Выберем подпоследовательность так, что $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ сходится. Что и означает сходимость подпоследовательности x_{n_k}.

20. Доказать, что в нормированном пространстве достигается расстояние от данной точки до произвольного конечномерного подпространства.

Надо показать, что в конечномерном подпространстве достигается минимум непрерывной функции $f(x)=\|x-x_0\|$. Но при $\|x\|>2\|x_0\|$ $f(x)>f(x_0)$. Поэтому достаточно проверить это свойство в замкнутом шаре. А он компактен.

1.8. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение. Евклидовым называется линейное пространство, наделенное скалярным произведением.

Любое евклидово пространство можно превратить в нормированное, введя норму по формуле $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ (обратное верно не всегда, см. приложение).

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\,\|y\|.$$

Следствие. Для любых двух отличных от нуля векторов $x\in E$, $y\in E$ определен угол между ними формулой

$$\cos(\widehat{x,y})=\frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Определение. Система векторов в евклидовом пространстве E называется полной, если замыкание линейной оболочки этой системы векторов есть E.

Определение. Ортогональным базисом в E называется полная ортогональная система векторов. Если векторы в ортогональном базисе единичной длины, то они образуют ортонормированный базис.

Неравенство Бесселя. Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ и вектора f справедливо неравенство

$$\sum_\alpha (f,\varphi_\alpha)^2\leqslant(f,f).$$

Равенство Парсеваля. Для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ и вектора f справедливо равенство

$$\sum_\alpha (f,\varphi_\alpha)^2=(f,f).$$

Теорема 1. В полном евклидовом пространстве E любой вектор единственным образом "раскладывается" по ортонормированному базису $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$, т.е. справедливо равенство

$$f=\sum_\alpha c_\alpha\varphi_\alpha,$$

где $c_\alpha=(f,\varphi_\alpha)$, и сумма в правой части этого равенства сходится (независимо от порядка) к f. Если $\sum\limits_\alpha|c_\alpha|^2<\infty$, то $\sum\limits_\alpha c_\alpha\varphi_\alpha$ сходится к некоторому элементу из E.

Определение. Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется гильбертовым пространством.

Теорема 2. Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны (т.е. существует изоморфизм линейных пространств, сохраняющий скалярное произведение).

Помимо естественной сходимости в метрике

$$\rho(f,g)=\|f-g\|=\sqrt{(f-g,\,f-g)},$$

называемой сильной, в гильбертовом пространстве определяется слабая сходимость.

Определение. Последовательность элементов φ_n сходится слабо к φ в гильбертовом пространстве E, если для любого f из E $(\varphi_n,f)\to(\varphi,f)$ при $n\to\infty$.

Задачи

1. Последовательность векторов f_n слабо сходится к f, а последовательность чисел $\|f_n\|$ – к $\|f\|$, тогда последовательность f_n сходится сильно.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\|f_n\|^2+\|f\|^2-2(f_n,f)}=0.$$

2. Последовательность функций f_n сходится к f сильно в точности тогда, когда (f_n, g) сходятся равномерно к (f,g) по всем векторам g с условием $\|g\|=1$. Доказать.

Доказательство. Действительно, в силу неравенства Коши-Буняковского

$$|(f_n,g)-(f,g)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\|g\|=\|f_n-f\|, \quad \text{если } \|g\|=1.$$

Это доказывает первую половину утверждения.

Зафиксировав $\varepsilon>0$, получим начиная с некоторого N

$$|(f_n-f,g)|<\varepsilon \quad \text{для всех } g:\ \|g\|=1.$$

Если $g=(f_n-f)/\|f_n-f\|$, то получим $\|f_n-f\|<\varepsilon$, начиная с номера N.

3. Найти в пространстве $L_2([0,1])$ ортонормированный базис из ограниченных функций h_i такой, что множества $\{h_i(x)\}_i$ неограничены для почти всех x.

Решение. Положим $h=1$,

$$h_n^j(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n} & \text{при } x\in\left(\dfrac{j-1}{2^n},\ \dfrac{j-\frac12}{2^n}\right];\\[2mm] -\sqrt{2^n} & \text{при } x\in\left(\dfrac{j-\frac12}{2^n},\ \dfrac{j}{2^n}\right];\\[2mm] 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда система h, h_n^j, где $n=0,1,2,\ldots$, $j=1,2,\ldots,2^n$, – искомая.

4. Построить в пространстве $L_2(R)$ бесконечномерное замкнутое подпространство, состоящее из непрерывных функций.

В качестве примера можно взять пространство всех непрерывных функций $f\in L_2(R)$, которые совпадают на любом отрезке вида $[k,k+1]$, $k\in Z$ с линейной функцией $a_k x+b_k$.

5*. Если система векторов $\{x_n\}$ в гильбертовом пространстве ортогональна, то следующие условия равносильны:

а) $\sum x_n$ сильно сходится;

б) $\sum x_n$ слабо сходится;

в) $\sum\|x_n\|^2$ сходится.

Решение. Очевидно, что условия а) и в) эквивалентны. Если $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\right\}_N$ сходится слабо, то по теореме Банаха-Штейнгауза [I] можно найти константу c такую, что

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{N} x_i, f\right)\right|\leqslant c \quad \forall N,\ \forall f:\ \|f\|\leqslant 1.$$

То есть нормы функционалов $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i$ ограничены константой c. Но норма функционала совпадает с нормой вектора, его задающего. Отсюда следует условие в).

6. Показать наличие слабого предела у последовательности $\{x_n\}$ элементов гильбертового пространства при наличии условий: $\|x_n\|=1$ $\forall n$, $(x_n,x_m)=c$ $(\forall m,n,\ m\neq n)$.

Решение. Обозначим $y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Тогда при $m>n$

$$(y_n,y_m)=\frac{1}{m}[1+(m-1)c],\quad (y_n,y_n)=\frac{1}{n}[1+(n-1)c].$$

Таким образом, последовательность y_n фундаментальна и имеет сильный предел y. При $n>i$ $(y_n,x_i)=\frac{1}{n}[1+(n-1)c]$. Поэтому $(x_i-y_n,x_j-y_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, система $\{x_i-y\}$ ортогональна. Поэтому слабо сходятся последовательности $\{x_i-y\}$ и $\{x_i\}$.

7*. Если в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность функций f_n сходится к f, то некоторая подпоследовательность f_{n_k} сходится к f почти всюду и найдется такая $h\in L_2[0,1]$, что $|f_{n_k}|\leqslant h$ почти всюду. Доказать.

Доказательство. Выберем быстро сходящуюся подпоследовательность n_k (для удобства обозначений заменим n_k на n), т.е. такую последовательность f_n, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_{n+1} - f_n \| < \infty .$$

Рассмотрим ряд $h = \sum_{n=0}^{\infty} | f_{n+1} - f_n |$, где $f_0 = 0$.

Тогда для частных сумм

$$\| \sum_{n=0}^{j} | f_{n+1} - f_n | \|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{j} \| f_{n+1} - f_n \| \right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \| f_{n+1} - f_n \| \right)^2 .$$

Поэтому $h \in L_2[0,1]$. По теореме Б.Леви ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$ сходится абсолютно почти всюду, следовательно, f_n сходится почти всюду и

$$| f_{n+1} | = | \sum_{k=0}^{n} (f_{k+1} - f_k) | \leq \sum_{k=0}^{n} | f_{k+1} - f_k | \leq h .$$

8*. Показать, что пространство $\mathcal{D}(R)$ всех финитных функций φ, имеющих непрерывные производные всех порядков, всюду плотно в $L_2(R)$.

Решение. Достаточно найти счетное всюду плотное множество в $L_2[-N, N]$. В силу теоремы Лузина и абсолютной непрерывности интеграла Лебега достаточно найти счетное всюду плотное множество в $C[-N, N]$ относительно топологии L_2. В силу теоремы Вейерштрасса достаточно приблизить полином с рациональными коэффициентами сколь угодно близко счетным множеством элементов из $\mathcal{D}(R)$, что легко осуществить в силу такого свойства: для любого отрезка I и открытого множества $U \supseteq I$ найдется функция φ, имеющая непрерывные производные всех порядков и

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin U \end{cases} ,$$

где $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ для всех x.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

2.1. Непрерывность и ограниченность линейных функционалов. Норма линейных функционалов

Определение. Всякая функция f, определенная на линейном нормированном пространстве, называется функционалом. Функционал называется линейным, если

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad x, y \in L : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) .$$

Определение. Линейный функционал называется ограниченным, если $\exists c \in R$ такое, что

$$| f(x) | \leq c \| x \| . \tag{2.1}$$

Нетрудно заметить, что значения ограниченного функционала f на единичном шаре по модулю не превосходят той же константы c. Очевидно, что справедливо и обратное: если для линейного функционала f верно неравенство

$$| f(x) | \leq c \tag{2.2}$$

для всех x из единичного шара в L, то функционал ограничен.

Напомним, что функционал f, определенный на пространстве L, называется непрерывным, если для всякого $x_0 \in L$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_{x_0} > 0$ такое, что

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

как только $\| x - x_0 \| < \delta_{x_0}$.

Теорема. В нормированном пространстве линейный функционал f непрерывен в том и только том случае, когда он ограничен.

Определение. Нормой линейного функционала f называется точная верхняя грань значений $| f(x) |$ на единичном шаре пространства L, т.е.

$$\| f \| = \sup_{\| x \| \leq 1} | f(x) | . \tag{2.3}$$

Таким образом, $\| f \|$ служит наименьшей возможной константой в соотношениях (2.1) и (2.2).

Норму функционала можно определить следующим образом:

$$\| f \| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\| x \|} . \qquad (2.4)$$

Равносильность определений (2.3) и (2.4) следует из того, что

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{|f(x)|}{\| x \|} = \left| f\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \right| .$$

Из (2.4) вытекает, что $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ при $x \in L$.

Пример. Пространство $L = R^n$,

$$f(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{\alpha}), \quad \vec{x}, \vec{\alpha} \in R^n ,$$

где $\vec{\alpha}$ - фиксированный вектор. Из неравенства Коши - Буняковского получаем

$$|f(\vec{x})| = |(\vec{x}, \vec{\alpha})| \leq \| \vec{x} \| \, \| \vec{\alpha} \| .$$

Следовательно, $|f(\vec{x})| / \| \vec{x} \| \leq \| \vec{\alpha} \|$.
Отсюда

$$\| f \| = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{|f(\vec{x})|}{\| \vec{x} \|} \leq \| \vec{\alpha} \| .$$

Так как $|f(\vec{\alpha})| = |(\vec{\alpha}, \vec{\alpha})| = \| \vec{\alpha} \|^2$, значит $\| f \| = \| \vec{\alpha} \|$.

Теорема Рисса. (Об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве.) Пусть H – действительное гильбертово пространство. Для всякого непрерывного линейного функционала f на H существует единственный элемент $x_0 \in H$ такой, что $f(x) = (x, x_0)$, $x \in H$, причем $\| f \| = \| x_0 \|$.

Это равенство определяет изоморфизм между H и H^*.

Задачи

1. Найти нормы следующих функционалов:

а) $f(x) = 2(x(1) - x(0))$, $x \in C[-1,1]$;

б) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)$, $x \in C[-1,1]$;

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt$, $x \in C[-1,1]$;

г) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t \, x(t)dt$, $x \in C[-1,1]$;

д) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$, $x \in C[-1,1]$.

2. Найти нормы функционалов:

а) $f(x) = \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$, $x \in C^1[-1,1]$;

$$\| x \| = \max_{[-1,1]} |x(t)| + \max_{[-1,1]} |x'(t)| ;$$

б) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t\,x(t)dt$, $x \in L_1[-1,1]$;

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t\,x(t)dt$, $x \in L_2[-1,1]$;

г) $f(x) = \int\limits_{0}^{1} t^{-1/3} x(t)dt$, $x \in L_2[0,1]$;

д) $f(x) = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$;

е) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x_n$, $x \in l_2$.

3. Найти нормы функционалов:

а) $F(f) = \int\limits_{0}^{1} f(x)(2x-1)dx$, $f \in C[0,1]$;

б) $F(f) = \int\limits_{0}^{1} x f(x)dx - f(0)$, $f \in C[0,1]$.

2.2. Сопряженные пространства. Слабая топология и слабая сходимость

Для линейных функционалов определены операции сложения и умножения их на число:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

Пространство непрерывных линейных функционалов, определенных на X, называется сопряженным и обозначается X^*. В X^* можно ввести два вида сходимости:

1) сильная сходимость (сходимость по норме X^*), т.е.

$$f_n,\ f\in X^*,\ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f, \text{ если } \|f_n-f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Топология в X^*, отвечающая введенной норме, называется сильной топологией в X^*;

2) $*$ - слабая сходимость, т.е. $f_n\to f$ $*$ - слабо, если $\forall x\in X$ $f_n(x)\to f(x), n\to\infty$. Если $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ сильно, то $f_n\to f$ $*$ - слабо, но не наоборот.

Пример. Последовательность

$f_n(x)=x_n$, где $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_2$,

$$*-\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,\ \|f_n\|=\sup_{\|x\|\le 1}|f_n(x)|=1.$$

Второе сопряженное пространство - это пространство, сопряженное к пространству функционалов X^*, $(X^*)^*=X^{**}$. Заметим, что всякий элемент $x_0\in X$ определяет некоторый линейный функционал на X^*. Положим $\Psi_{x_0}(f)=f(x_0)$,

где x_0 - фиксированный элемент, $x_0\in X$, а $f\in X^*$. Данный функционал определен на X^* и является линейным, так как

$$\Psi_{x_0}(\alpha f_1+\beta f_2)=\alpha f_1(x_0)+\beta f_2(x_0)=\alpha\Psi_{x_0}(f_1)+\beta\Psi_{x_0}(f_2).$$

Слабой топологией пространства X называется наименьшая топология пространства X, в которой все множества вида

$$O_\varepsilon(x_0,f_1,\dots,f_k)=\{x:\max_i\ f_i(x)-f_i(x_0)<\varepsilon,\ f_i\in X^*\}$$

открыты. Сходимость в X, определяемая слабой топологией, называется слабой сходимостью: $x_n\in X$ и x_n слабо сходится к $x_0\in X$, если для любого линейного непрерывного функционала $\varphi(x)$ на X числовая последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ сходится к $\varphi(x_0)$.

Задачи

1. Доказать, что при $p>1$

$$(l_p)^*=l_q,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

т.е. что всякий непрерывный линейный функционал в пространстве l_p при $p>1$ имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n,$$

где

$$x=(x_1,x_2,\dots)\in l_p,\ y=(y_1,y_2,\dots)\in l_q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

и $\|f\|=\|y\|_{l_q}$.

2. Доказать, что $(c_0)^*=l_1$, т.е. что всякий непрерывный линейный функционал в пространстве c_0 имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n,$$

где $x=(x_1,x_2,\dots)\in c_0, y=(y_1,\dots)\in l_1$ и $\|f\|=\|y\|_{l_1}$.

3. Доказать, что $l_1^*=m$, т.е. что всякий непрерывный линейный функционал в пространстве l_1 имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n,$$

где $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_1,\ y=(y_1,y_2,\dots)\in m$ и $\|f\|=\|y\|_m$.

4. Для $x(t)\in L_2[-1,1]$ положим

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\cos \pi n t\,dt .$$

а) Доказать, что f_n - ограниченный линейный функционал и найти $\| f_n \|$.

б) Доказать, что $f_n \to 0$ при $n \to \infty$ *- слабо.

в) Верно ли, что $f_n \to 0$, $n \to \infty$?

5. Доказать, что норма f из L^*, где L – нормированное пространство, обратна к расстоянию в L от нуля до гиперплоскости $\{x: f(x)=1\}$.

Решение. Заметим, что расстояние d между нулем и гиперплоскостью $\{x: f(x)=1\}$ есть $\inf\limits_{\{x: f(x)=1\}} \| x \|$. Но в силу линейности

$$\| f \| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\{x: f(x)=1\}} \frac{1}{\|x\|} .$$

Если для последовательности x_n, где $f(x_n)=1$, $\|x_n\|$ стремится к наименьшему значению, то $\frac{1}{\|x_n\|}$ стремится к наибольшему значению. Поэтому

$$\inf_{\{x: f(x)=1\}} \|x\| = \frac{1}{\sup\limits_{\{x: f(x)=1\}} \frac{1}{\|x\|}} .$$

6*. Доказать, что в пространстве l_1 слабая топология и топология, определяемая нормой $\|x\| = \sum |x_i|$, совпадают.

7*. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство со слабой топологией. Доказать, что замыкание единичной сферы совпадает с единичным шаром.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.1. Непрерывность, ограниченность и норма линейных операторов

Определение. Пусть X , Y - линейные нормированные пространства. Отображение $A: X \to Y$ с областью определения $\Delta(A) \subset X$ называется линейным оператором, если:

1) $\Delta(A)$ - линейное многообразие;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) \forall x_1, x_2 \in \Delta(A), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$.

Определим ядро линейного оператора A

$$\operatorname{Ker} A = \{ x \in X : Ax = 0 \}$$

и образ линейного оператора

$$\operatorname{Im} A = \{ y \in Y : \exists\ x \in \Delta(A) : y = Ax \} .$$

Как ядро, так и образ линейного оператора являются линейными многообразиями.

Оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $Ax_n \to Ax_0$ при $x_n \to x_0$.

Линейный оператор $A: X \to X$ называется ограниченным, если образ единичного шара является ограниченным множеством.

Теорема. Линейный оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Определим норму линейного оператора A следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Отсюда следует, что

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| .$$

Пример 1. Пусть $X = l_1 = \{x_1, x_2, \dots\}: \sum_i |x_i| < \infty\}$ и

$$(Ax)_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2+n^2+1} .$$

Доказать, что A - линейный ограниченный оператор, отображающий l_1 в l_1, и оценить его норму.

Решение. Линейность оператора очевидна. Проверим ограниченность:

$$\|Ax\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2+n^2+1} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2+n^2+1} \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{n^2+2} = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} = \text{const}\, \|x\|_{l_1} .$$

Отсюда

$$\|A\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно, мы показали, что A отображает l_1 в l_1 и ограничен (непрерывен), $\|A\| \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Пример 2. Рассмотрим тот же оператор A, что и в примере 1, но теперь $A: l_2 \to l_2$.

Решение. $\|Ax\|^2_{l_2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2+n^2+1} \right)^2.$

Заметим, что

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2+n^2+1} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2+1} \right)^2 =$$

$$= \|x\|^2_{l_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2+1)^2}.$$

Отсюда

$$\|Ax\|^2_{l_2} \leqslant \|x\|^2_{l_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2+1)^2} = \text{const}\, \|x\|^2.$$

Следовательно,

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2+1)^2}} \leqslant \sqrt{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(r^2+1)^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 3. Пусть $A: C[0,2] \to C[0,2]$,

$$(Af)(x) = \int_0^2 \frac{f(y)}{xy+1}\, dy.$$

Доказать, что A – линейный ограниченный оператор и оценить его норму.

Решение. $\|Af\| = \max\limits_{x\in[0,2]} \left| \int_0^2 \frac{f(y)}{xy+1}\, dy \right| \leqslant$

$$\leqslant \max_{x\in[0,2]} \int_0^2 \frac{|f(y)|}{|xy+1|}\, dy \leqslant \max_{x\in[0,2]} \int_0^2 \frac{\max\limits_{y\in[0,2]} |f(y)|}{|xy+1|}\, dy =$$

$$= \|f\| \max_{x\in[0,2]} \int_0^2 \frac{dy}{xy+1} = 2\|f\|.$$

Следовательно, $\|A\| \leqslant 2$.

В пространстве всех линейных ограниченных операторов $A: X \to Y$ сходимость по норме называется равномерной ($\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$), а сходимость на каждом элементе – сильной ($\forall f \; \|A_n f - Af\| \to 0$ при $n \to \infty$).

Определение. Последовательность операторов A_n слабо сходится к оператору A, если для любого непрерывного линейного функционала c, определенного на пространстве Y, и любого x из X имеет место $|c(A_n x) - c(Ax)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 4. Доказать, что пространство линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, несепарабельно.

Решение. Рассмотрим $L_2[0,1]$ и семейство операторов $\{P_t\}$, $t \in [0,1]$, где $P_t f = \chi_{[0,t]} f$ и χ_A – индикатор множества A. Тогда $\|P_t - P_s\| = 1\ (t \neq s)$. Поэтому множество шаров с центрами в точках P_t и радиусами $\frac{1}{2}$ имеет мощность континуума и состоит из попарно не пересекающихся элементов.

Задачи

1. Доказать, что следующие операторы ограничены и найти их нормы:

а) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$;

б) $A: C[-1,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x(t)$;

в) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=t^2 x(0)$;

г) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x(t^2)$;

д) $A: C^1[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x(t)$;

е) $A: C^1[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\dfrac{dx}{dt}$;

ж) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t)=t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$.

Ответ. Для а) – е) нормы операторов равны 1; ж) $\|A\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Найти нормы следующих операторов:

а) $A: L_2[0,1]\to R$, $A(f)=(f,f_0)$;

б) $A: C[0,1]\to R$, $A(f)=\int\limits_0^1 K(x)f(x)dx$;

в) доказать, что $\|A\|\le 2$, если $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ и $A(f)=\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$.

Решение. а) В силу неравенства Коши – Буняковского $|(f,f_0)|\le\|f\|\cdot\|f_0\|$ имеем $\|A\|\le\|f\|$, но $\|A\|\ge$ $\ge\left|\left(f,\dfrac{f}{\|f\|}\right)\right|=\|f\|$.

б) Очевидно, что $|Af|\le\|f\|\int\limits_0^1|K(x)|dx$.

Пусть $f_0(x)=\begin{cases}1, & \text{если } K(x)\ge 0,\\ -1, & \text{иначе},\end{cases}$

тогда $|Af|=\int\limits_0^1|K(x)|dx$.

Но $f_0(x)\notin C[0,1]$. Легко построить $f_n(x)\in C[0,1]$ со свойствами $|f_n(x)|\le 1$, $\int|f-f_n|dx\to 0$. Тогда $|Af_n|\to\int\limits_0^1|K(x)|dx$.

в) Имеем

$$\|Af\|^2=\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2 d\Big(-\frac{1}{x}\Big)=-\frac{1}{x}\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2\Big|_0^1+2\int\limits_0^1(Af)\cdot f dx.$$

Но по неравенству Коши – Буняковского

$$\left|\frac{1}{x}\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2\right|\le\frac{1}{x}\Big(\sqrt{\int\limits_0^x|f(t)|^2dt}\sqrt{\int\limits_0^x 1\,dt}\Big)^2=\int\limits_0^x|f(t)|^2dt.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\Big(\int\limits_0^x f(t)dt\Big)^2=0$.

Имеем

$$\|Af\|^2=-\Big(\int\limits_0^1 f(t)dt\Big)^2+2\int\limits_0^1(Af)f dx\ge 0.$$

Отсюда

$$\|Af\|^2\le 2\int\limits_0^1(Af)f dx\le 2\|Af\|\cdot\|f\|.$$

Поэтому $\|A\|\le 2$.

3. Для каких функций $a(x)$ оператор $A(f)=a(x)f$, $A: L_p[0,1]\to L_q[0,1]$ является непрерывным.

4. Будет ли ограниченным оператор $A: C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=dx/dt$, с областью определения L – линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций?

Указание. Рассмотреть последовательность $x_n(t)=t^n$, $n\in N$.

Ответ. Нет.

5. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – непрерывный линейный оператор с $\Delta(A)=X$. Всегда ли существует $x \in X$, $x \neq 0$, такое, что $\|Ax\| = \|A\| \, \|x\|$?

Ответ. Нет, не всегда.

6*. Если линейный оператор в гильбертовом пространстве ограничен, то он ограничен на множестве элементов ортонормированного баланса. Доказать, что обратное утверждение не верно.

Решение. Дополним ортонормированный базис $\{\varphi_i\}$ до максимальной линейной независимой системы (базис Гамеля). Тогда любой элемент гильбертова пространства можно единственным образом представить в виде конечной линейной комбинации векторов базиса Гамеля. Пусть $A(\varphi_i)=\varphi_1 \; \forall i$ и на остальных базисных векторах действие A произвольно. Отображение A естественно доопределяется до линейного оператора A, действующего на всем гильбертовом пространстве. Положим

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{i} \varphi_i / \sqrt{i}, \quad i \in N.$$

Очевидно, что $\|\Psi_i\| = 1 \; \forall i \in N$ и $\|A\Psi_i\| = \sqrt{i}$, т.е. A не ограничен.

7. Доказать, что следующий оператор ограничен и найти его норму:

$$A: L_2[-\pi,\pi] \to l_2, \quad A: x(t) \to (a_0, b_1, a_1, b_2, \ldots),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt.$$

8. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^{\tau} x(\tau)\,d\tau,$$

и последовательность операторов $A_n: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(A_n x)(t) = \int_0^t \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!}\Big] x(\tau)\,d\tau, \quad n \in N.$$

Сходится ли последовательность A_n к A? Каков характер сходимости?

Ответ: последовательность A_n сходится к оператору A равномерно.

9. Доказать, что если последовательность линейных операторов A_n, B_n в гильбертовом пространстве сильно сходится к линейному оператору A, B соответственно, то $A_n B_n$ сильно сходится к AB. Если рассматривать только слабую сходимость /т.е. A_n сходится к A, если $\forall f, g \; (A_n f, g) \to (Af, g)$/, то то же утверждение не верно.

Решение. По теореме Банаха – Штейнгауза найдется такое c, что $\|A_n\| \le c$ для всех n. В силу очевидных неравенств

$$\|A_n B_n f - ABf\| \le \|A_n B_n f - A_n Bf\| + \|A_n Bf - ABf\| \le$$

$$\le c\,\|B_n f - Bf\| + \|A_n Bf - ABf\|,$$

будет сильная сходимость $A_n B_n$ к AB.

Рассмотрим последовательность линейных ограниченных операторов A_n таких, что $A_n f = c_n \varphi_1 + c_1 \varphi_n$, где $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, $\{\varphi_k\}$ – ортонормированный базис,

$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Тогда A_n слабо сходится к нулевому оператору, но A_n^2 слабо сходится к оператору P, где $Pf = c_1 \varphi_1$, $f = \sum c_k \varphi_k$.

10. Показать, что для последовательности операторов A_n в гильбертовом пространстве из слабой сходимости к A и условия $\|A_n x\| \to \|Ax\|$ для любого x следует сильная сходимость к A.

Решение. Действительно, так как $(A_n x, Ax) \to \|Ax\|^2$, то

$$\|A_n x - Ax\|^2 = (A_n x - Ax, A_n x - Ax) = \|A_n x\|^2 + \|Ax\|^2 - $$

$$-2\,(A_n x, Ax) \to 0.$$

11. В каких операторных топологиях (сильной, слабой, равномерной) отображение $\varphi: A \to \|A\|$ непрерывно.

Решение. Так как $\big|\|A_n\| - \|A\|\big| \le \|A_n - A\|$, то отображение непрерывно в равномерной топологии.

Построим последовательность A_n, сильно сходящуюся к A

(а значит и слабо сходящуюся), со свойством

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n\|\neq\|A\| .$$

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в $L_2(X)$ и $A_n f=c_n\varphi_n$, где $f\in L_2(X)$, $f=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty$. Тогда $\|A_n f\|\to 0$ при $n\to\infty$ для любого f, т.е. A_n сильно сходится к нулевому оператору. Но $\|A_n\|=1$ для любого n.

12. Пусть $A: l_1\to l_1$,

$$(Ax)_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{m^2+n^2+1} .$$

Доказать, что A - линейный ограниченный оператор и оценить его норму.

13. То же, что и в задаче 6, но $A: l_2\to l_2$.

14. Пусть

$$(Ax)_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{(m+n+4)^2}.$$

Рассмотреть случаи:

а) $A: l_1\to l_1$;

б) $A: l_2\to l_2$;

в) $A: l_1\to l_2$;

г) $A: l_2\to l_1$.

Оценить норму линейного оператора A.

15. Пусть $A: C[0,1]\to C[0,1]$,

$$(Ax)(t)=\int_0^1\frac{f(\tau)}{t^2+\tau+1}\,d\tau .$$

Доказать, что A - линейный ограниченный оператор и оценить его норму.

16. Пусть $(Ax)(t)=\int_0^{\infty}\frac{x(\tau)}{t^2+\tau^2+1}\,d\tau$,

а) $A: L_1[0,+\infty)\to L_1[0,+\infty)$;

б) $A: L_1[0,+\infty)\to C[0,+\infty)$.

Оценить норму линейного оператора A.

Решение. Рассмотрим случай $A: L_1[0,+\infty)\to L_1[0,+\infty)$:

$$\|Ax\|=\int_0^{\infty}|(Ax)(t)|\,dt=\int_0^{\infty}\Big|\int_0^{\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{t^2+\tau^2+1}\Big|\,dt\leqslant\int_0^{\infty}dt\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{|x(\tau)|\,d\tau}{t^2+\tau^2+1}<\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}\frac{|x(\tau)|\,d\tau}{1+t^2}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}|x(\tau)|\,d\tau=\frac{\pi}{2}\|x\| .$$

Следовательно, $\|A\|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С другой стороны, пусть

$$x_\delta(t)=\begin{cases}1/\delta\ , & 0\leqslant t\leqslant\delta ,\\ 0\ , & \delta<t .\end{cases}$$

Тогда $\|x_\delta\|=1$ и $\|Ax_\delta\|=\frac{\pi}{2}-o(\delta)$. Следовательно, $\|A\|=\frac{\pi}{2}$.

17[*]. Рассмотрим функционал $\Psi(f)=\int_0^1 f(x)dx$, определенный в пространстве $\mathcal{D}=\{f\in C[0,1]:\exists\alpha, f(x)=\alpha x\}$. Доопределить Ψ на всем $C[0,1]$ с сохранением нормы.

Решение. По теореме Рисса любой непрерывный функционал представим в виде $\int_0^1 f(x)d\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - функция с ограниченным изменением. Нетрудно заметить, что для

$$\varphi(x)=\begin{cases}0\ , & x<1;\\ 1/2\ , & x=1 .\end{cases}$$

$$\int_0^1\alpha x\,d\varphi(x)=\int_0^1\alpha x\,dx=\frac{1}{2}\alpha \quad\text{и}\quad \mathop{V}_0^1\varphi(x)=\frac{1}{2} .$$

Так как $\left|\int_0^1 f(x)d\varphi(x)\right|\leqslant\max|f(x)|\mathop{V}_0^1\varphi(x)$, то норма полученного функционала не изменилась. Геометрически $\Psi(f) = \frac{1}{2} f(1)$.

18. Привести пример всюду определенного линейного функционала в бесконечномерном банаховом пространстве, являющегося разрывным.

Решение. Пусть $\{\varphi_i\}$ – счетная линейно независимая система векторов, где $\|\varphi_i\| \leq 1$. Дополним ее до максимальной линейно независимой системы (базис Гамеля). Любой элемент единственным образом представим в виде конечной линейной комбинации векторов. Пусть $f(\varphi_i) = i$. На остальных базисных векторах действие f произвольно. Функционал по линейности корректно определяется на все пространство. Он не ограничен.

19. Рассмотрим линейный обратимый оператор T в нормированном пространстве L со свойством

$$\forall x \in L, \forall n \in Z \quad \|T^n x\| \leq c\|x\|.$$

Доказать, что существует норма со свойствами

$$\Delta^{-1}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \Delta\|x\|, \ \|Tx\|_1 = \|x\|_1, \ \forall x \in L.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$p(x) = \sup_n \|T^n x\|.$$

Непосредственно проверяется, что $p(x)$ есть норма и удовлетворяет равенству $p(Tx) = p(x)$. Имеем

$$\frac{1}{c}\|x\| \leq \|x\| \leq \sup_n \|T^n x\| \leq c\|x\| \quad (c \geq 1).$$

20. Доказать, что любой линейный оператор в нормированном пространстве, переводящий любую сильно сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, является ограниченным.

Доказательство. Если оператор A неограничен, то существует последовательность $\{x_n\}$ с такими свойствами: $\|x_n\|$ сходится к нулю, а $\|Ax_n\|$ не сходится к нулю. Выберем такую подпоследовательность n_k, что $\|Ax_{n_k}\| > c \ \forall n_k$. Подберем числа α_n так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n x_n\| = 0$. Тогда для $\{y_n\}$, где $y_n = \alpha_{n_k} x_{n_k}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \|Ay_n\| = \infty.$$

Но последовательность $\{Ay_n\}$ не может слабо сходиться в силу теоремы Банаха – Штейнгауза (см. [I], так как иначе она была бы сильно ограничена, т.е. $\|Ay_n\| < c \ \forall n$.

21. Рассмотрим пространство непрерывно дифференцируемых функций $C^T[0,2\pi]$ таких, что $f(0) = f(2\pi)$, $f'(0) = f'(2\pi)$.

Пусть $(Af)_n = \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$A: C^T[0,2\pi] \to l_2, \ A: f \to (\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots).$$

Показать, что A – ограниченный оператор и оценить его норму.

Решение. $\|Af\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx \right|^2$;

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{1}{in} f(x) e^{inx} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(x) e^{inx} dx =$$

$$= -\frac{1}{ni}\int_0^{2\pi} f'(x) e^{inx} dx \ (n \neq 0); \ \left|\int_0^{2\pi} f'(x) e^{inx} dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{n} \|f\|_{C^1[0,2\pi]}.$$

Следовательно,

$$\|Af\|^2 \leq \|f\|^2 \left(\sum_{\substack{n\neq 0,\\ n=-\infty}}^{+\infty} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + 4\pi^2 \right).$$

3.2. Обратный оператор. Обратимость

Оператор A называется обратимым, если для $y \in \operatorname{Im} A$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение.

Теорема. Оператор A^{-1}, обратный линейному оператору, также линеен.

Теорема (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть A – линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.

П р и м е р 1. Пусть X – банахово пространство относительно двух норм. Пусть $\| x\|_1 \leq c\| x\|_2 \forall x\ (c>0)$. Доказать, что существует $D>0$ со свойством $\| x\|_2 \leq D\| x\|_1 \forall x$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой Банаха об обратном операторе для тождественного отображения из одного нормированного пространства в другое.

Задачи

1. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется непрерывно обратимым, если область значений $E(A)=Y$, оператор A^{-1} существует и ограничен.

Рассмотреть оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,
$$(Ax)(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau + x(t).$$

Доказать, что A непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1}.

Ответ: $A^{-1}y = y(t)-\int\limits_0^t e^{\tau-t} y(\tau)\,d\tau$.

2. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,
$$(Ax)(t)=x(t)+\int\limits_0^1 e^{s+t}x(s)ds$$
непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1}.

Ответ: $A^{-1}y=y(t)-\dfrac{2}{e^2-1}\int\limits_0^1 y(s)\,e^{s+t}ds$.

3. Рассмотреть оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,
$$(Ax)(t)=\frac{d^2x}{dt^2}+x(t),$$
с областью определения $\Delta(A)$ – линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0)=x'(0)=0$.

Доказать, что а) A – неограниченный линейный оператор; б) A непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1}.

Ответ: б) $A^{-1}y=\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$.

4. Пусть A и B – линейные операторы в банаховом пространстве L и существует обратный оператор к AB, определенный на всем пространстве. Можно ли сказать то же относительно

операторов A и B. Изменится ли ответ, если требовать, чтобы $AB=BA$.

Решение. Нет. Рассмотрим в l_1 операторы:
$$B(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots),$$
$$A(x_1,x_2,\dots)=(x_2,x_3,\dots).$$
Тогда $AB=E$.

Если $AB=BA$, то A и B имеют обратные операторы.

Указание. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор, обратный к AB. Из соотношений $\mathcal{D}AB=E$, $AB\mathcal{D}=E$, $\mathcal{D}BA=E$, $BA\mathcal{D}=E$ следует, что $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}B=0$, $\operatorname{Im}A=\operatorname{Im}B=L$. Ограниченность оператора A^{-1} вытекает из того, что $A^{-1}=B\mathcal{D}$.

3.3. Сопряженные операторы

Пусть $A: X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, отображающий линейное нормированное пространство X в такое же пространство Y. Пусть g – непрерывный линейный функционал на Y, т.е. $g\in Y^*$; $f(x)=g(Ax)$ – непрерывный линейный функционал, определенный на X, $f\in X^*$. Следовательно, каждому функционалу $g\in Y^*$ мы сопоставим функционал $f\in X^*$, т.е. получим оператор, отображающий Y^* в X^*. Этот оператор называется сопряженным к A и обозначается A^*.

Задачи

1. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если:

а) $(Ax)(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$;

б) $(Ax)(t)=t\ x(t)$;

в) $(Ax)(t)=\int_0^1 t\ x(s)ds$;

г) $(Ax)(t)=\int_0^1 t\ x(t)dt$.

Ответ: а) $A^*y=\int\limits_t^1 y(\tau)\,d\tau$; б) $A^*y=ty(t)$; в) $A^*y=\int\limits_0^1 ty(t)\,dt$; г) $A^*y=\int\limits_0^1 t\ y(s)\,ds$.

2. Рассмотреть оператор Гильберта – Шмидта

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Af = \int_0^1 K(x,y) f(x)\, d l(x).$$

Доказать, что $A = A^*$ в точности тогда, когда $K(x,y) = K(y,x)$ для почти всех пар (x,y).

Доказательство. Нетрудно заметить, используя теорему Фубини, что оператор Гильберта – Шмидта с ядром $K^*(x,y) = K(y,x)$ является сопряженным к A.

Если $A = A^*$, то для любых $f, g \in L_2[0,1]$

$$\int_0^1\int_0^1 K(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 K^*(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy.$$

Отсюда для любого измеримого множества B

$$\int_B K(x,y)\, dx\, dy = \int_B K^*(x,y)\, dx\, dy,$$

т.е. $K(x,y) = K^*(x,y)$ для почти всех пар (x,y).

3. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to l_1$, если:

а) $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$;

б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, где $\lambda_n \in R$, $|\lambda_n| \le 1$, $n \in N$;

в) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$;

г) $Ax = (x_2, x_3, \dots)$;

Ответ: а) $A^*: m \to m$, $A^*x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$;

б) $A^*: m \to m$, $A^*x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$;

в) $A^*: m \to m$, $A^*x = (x_2, x_3, \dots)$;

г) $A^*: m \to m$, $A^*x = (0, x_1, x_2, \dots)$.

4. Пусть $A: l_1 \to l_1$,

$$(Ax)_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m + n^2 + 1}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Найдите сопряженный оператор A^*.

Решение. $A^*: m \to m$, где $m = l^*_1$ – пространство всех ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой

$\|x\| = \sup_n |x_n|$. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$. Тогда

$$(A^* f)(x) = f(Ax) = \sum_n f_n \sum_m \frac{x_m}{n^2 + m + 1} =$$

$$= \sum_m \sum_n f_n \frac{x_m}{m + n^2 + 1} = \sum_m x_m \sum_n \frac{f_n}{n^2 + m + 1}.$$

Следовательно,

$$(A^* f)_m = \sum_n \frac{f_n}{n^2 + m + 1}$$

или

$$(A^* f)_n = \sum_m \frac{f_m}{m^2 + n + 1}, \quad f = (f_1, f_2, \dots) \in m.$$

5. Пусть $A: L_1[a,b] \to L_1[a,b]$,

$$(Ax)(t) = \int_a^b \frac{1}{t^2 + \tau + 1} x(\tau)\, d\tau.$$

Найдите сопряженный оператор A^*.

Решение. Как известно, линейный функционал $F(x)$, определенный в $L_1[a,b]$, имеет вид

$$F(x) = \int_a^b f(t) x(t)\, dt,$$

где $x \in L_1[a,b]$, $f \in L_\infty[a,b]$.

Следовательно,

$$(A^* G)(x) = G(Ax) = \int_a^b g(t) \left(\int_a^b \frac{x(\tau)}{t^2 + \tau + 1} d\tau \right) dt =$$

$$= \int_a^b x(\tau) \left(\int_a^b \frac{g(t)\, dt}{t^2 + \tau + 1} \right) d\tau = F(x) = \int_a^b f(\tau) x(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$f(\tau) = (A^* G)(\tau) = \int_a^b \frac{g(\tau)}{\tau^2 + t + 1}\, dt.$$

или

$$f(t)=(A^*G)(t)=\int_a^b \frac{g(\tau)}{\tau^2+t+1}\,d\tau .$$

Мы сопоставили каждому линейному непрерывному функционалу $G(y)=\int_a^b g(\tau)y(\tau)d\tau$ линейный непрерывный функционал $F(x)=$ $=\int_a^b f(\tau)x(\tau)d\tau$.

6. Доказать, что для любого оператора A в гильбертовом пространстве H справедливо разложение

$$\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^* = H,$$

где $\oplus$ - ортогональная сумма.

7. Пусть $A: L_2[\alpha,b]\to L_2[\alpha,b]$,

$$(Ax)(t)=\int_a^b \frac{1}{t^3+t^s+1}\,x(\tau)d\tau\ ,\quad x(\tau)\in L_p[\alpha,b] .$$

Найти сопряженный оператор.

8*. Найти сопряженный оператор следующего оператора:

$$P: C[0,2]\to C[0,1],\ (Pf)(x)=f(x),\quad \forall x\in[0,1].$$

Решение. В силу теоремы Рисса для любого непрерывного функционала φ в $C[\alpha,b]$ найдется такая функция ограниченной вариации Φ, что $\varphi(f)=\int_a^b f\,d\Phi$ для любой $f\in C[\alpha,b]$. В силу задания P, оператор P^* есть отображение $P^*(\Phi_1)=\Phi_2$, полностью определяемое равенством

$$\int_0^2 f(x)\,d\Phi_2=\int_0^1 f(x)\,d\Phi_1\quad \forall f\in C[0,2] .$$

Нетрудно увидеть, что для функции

$$\Phi_2(x)=\begin{cases}\Phi_1(x), & x\in[0,1],\\ \Phi_1(1), & x>1\end{cases}$$

равенство всегда имеет место.

3.4. Вполне непрерывные операторы

Определение. Пусть X, Y - линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A: X\to Y$ называется вполне непрерывным (компактным), если он переводит замкнутый единичный шар пространства X в компактное множество пространства Y.

Теорема. Оператор $A: L_2[\alpha,b]\to L_2[\alpha,b]$,

$$(Af)(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt ,$$

является компактным, если

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt<\infty ,$$

где $K(s,t)$ - ядро Гильберта - Шмидта.

Задачи

1. Пусть $A: L_2[0,\infty)\to L_2[0,\infty)$,

$$(Af)(x)=\int_0^\infty \frac{f(y)}{x^2+y^2+1}\,dy,\quad f\in L_2[0,\infty) .$$

Доказать, что A - вполне непрерывный оператор.

Решение. Покажем, что ядро оператора A является ядром Гильберта - Шмидта:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy\int_0^\infty d\rho\int_0^{\pi/2}\frac{\rho\,d\varphi}{(\rho^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}<\infty .$$

2. Пусть $A: l_1\to l_2$,

$$(Ax)_n=\sum_{m=1}^\infty \frac{x_m}{n^2+m^2+1}\ ,\quad n=1,2,\dots .$$

Доказать, что A - вполне непрерывный оператор.

3. Рассмотреть оператор $A: l_2\to l_2$, $A(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$.

Доказать, что A не представим в виде $\lambda E+K$, где E - тождественный оператор, а K - компактный.

Доказательство. Действительно, последовательность $\{(A-\lambda E)e_i\}$, где $\{e_i\}$ - ортонормированный базис в l_2, не содержит фундаментальной подпоследовательности. Поэтому оператор $A-\lambda E$ не компактен.

3.5. Теоремы Фредгольма

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt+f(s)$$

с ядром Гильберта - Шмидта. Запишем это уравнение в виде $\varphi=A\varphi+f$. Пусть $T=I-A$, где I - тождественный оператор. Тогда верны теоремы Фредгольма:

I. Неоднородное уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения $T^*\psi_0 = 0$.

II. (Альтернатива Фредгольма.) Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом $f \in H$ одно и только одно решение, либо однородное уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.

III. Однородные уравнения $T\varphi_0 = 0$ и $T^*\psi_0 = 0$ имеют одно и то же, притом конечное число линейно независимых решений.

Задачи

1. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (1 + \alpha xy) f(y)\,dy = x^2.$$

Найти, при каких α это уравнение разрешимо.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение

$$f(x) + \int_0^1 (1 + \alpha xy) f(y)\,dy = 0,$$

или

$$f(x) + \int_0^1 f(y)\,dy + \alpha x \int_0^1 y f(y)\,dy = 0.$$

Пусть

$$c_1 = \int_0^1 f(y)\,dy, \quad c_2 = \int_0^1 y f(y)\,dy.$$

Тогда

$$f(x) = -c_1 - c_2 \alpha x.$$

Следовательно,

$$c_1 = \int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1 (-c_1 - c_2 \alpha y)\,dy = -c_1 - \frac{c_2}{2}\alpha;$$

$$c_2 = \int_0^1 y f(y)\,dy = \int_0^1 (-c_1 y - c_2 \alpha y^2)\,dy = -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2 \alpha}{3}.$$

Отсюда

$$c_1 + \frac{\alpha}{4} c_2 = 0,$$

$$c_1 + 2\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) c_2 = 0,$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \frac{\alpha}{4} \\ 1 & 2\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда $\alpha \neq -\frac{24}{5}$, $c_1 = c_2 = 0$ и $f(x) \equiv 0$.

Однородное уравнение имеет единственное нулевое решение, и, следовательно, исходное уравнение разрешимо и имеет единственное решение.

Пусть теперь $\alpha = -\frac{24}{5}$. Тогда $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, $f(x) = 1 - 4x$ является решением однородного (сопряженного) уравнения, однако $\int_0^1 x^2(1-4x)\,dx \neq 0$, т.е. правая часть x^2 не ортогональна к решению $(1-4x)$, и, следовательно, исходное уравнение при $\alpha = -\frac{24}{5}$ неразрешимо.

2. При каких λ в пространстве $L_p[a,b]$ существует решение уравнения

$$f(x) = 1 + \lambda \int_a^b e^{x-y} f(y)\,dy.$$

Решение. Имеем

$$f(x) = 1 + \lambda e^x \int_a^b f(y) e^{-y}\,dy.$$

Обозначив $\int_a^b f(y) e^{-y}\,dy = c$, получим $f(x) = 1 + \lambda e^x c$. Поэтому

$$c = \int_a^b f(y) e^{-y}\,dy = \int_a^b (1 + \lambda e^y c) e^{-y}\,dy = \lambda c(b-a) + e^{-a} + e^{-b}.$$

Отсюда $c = \dfrac{e^{-a} - e^{-b}}{1 - \lambda(b-a)}$ и $f(x) = 1 + \lambda e^x \dfrac{e^{-a} - e^{-b}}{1 - \lambda(b-a)}$.

Ответ. Решение существует при $\lambda \neq 1/(b-a)$.

3. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (x + \alpha y^2) f(y)\,dy = 1 + \beta x.$$

Найти такое β, чтобы это уравнение было разрешимо при любом α.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение

$$f(x) + \int_0^1 (x + \alpha y^2) f(y)\,dy = 0,$$

или

$$f(x) = -x \int_0^1 f(y)\,dy - \alpha \int_0^1 y^2 f(y)\,dy = -c_1 x - \alpha c_2,$$

где $c_1 = \int_0^1 f(y)\,dy$, $c_2 = \int_0^1 y^2 f(y)\,dy$.

Следовательно,

$$c_1 = \int_0^1 (-c_1 x - \alpha c_2)dx = -\frac{c_1}{2} - \alpha c_2,$$

$$c_2 = \int_0^1 x^2(-c_1 x - \alpha c_2)dx = -\frac{c_1}{4} - \alpha\frac{c_2}{3},$$

$$\frac{3}{2}c_1 + \alpha c_2 = 0,$$

$$\frac{c_1}{4} + \left(1+\frac{\alpha}{3}\right)c_2 = 0,$$

$$\det\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \alpha \\ \frac{1}{4} & \left(\frac{\alpha}{3}+1\right)\end{vmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = -6.$$

По альтернативе Фредгольма при $\alpha \neq -6$ неоднородное уравнение при любой его правой части из пространства $L_2[0,1]$ имеет единственное решение.

При $\alpha = -6$ однородное сопряженное уравнение имеет вид

$$f(x) + \int_0^1 (-6x^2 + y) f(y)\,dy = 0,$$

или

$$f(x) = 6c_1 x^2 - c_2,$$

где $$\tilde{c}_1 = \int_0^1 f(y)\,dy, \quad \tilde{c}_2 = \int_0^1 y f(y)\,dy.$$

Получаем $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$.

Следовательно, однородное сопряженное уравнение имеет решение $f(x) = 6x^2 - 1$.

По первой теореме Фредгольма должно выполняться условие ортогональности: $\int_0^1 (6x^2-1)(1+\beta x)\,dx = 0$.

Отсюда $\beta = -1$.

Следовательно, при $\beta = -1$ исходное уравнение имеет единственное решение при всех α.

4. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (x + y^2 + \alpha) f(y)\,dy = 1 + \beta x^2.$$

Найти такое β, чтобы это уравнение было разрешимо при любом α.

5. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (xy^2 + \alpha) f(y)\,dy = x + \beta.$$

При каких β это уравнение разрешимо для любого α ?

6. Доказать, что тождественный оператор в пространстве $L_2[0,1]$ не является интегральным.

Интегральный оператор компактен. Поэтому достаточно использовать некомпактность единичного шара в бесконечномерном пространстве.

7. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$$\varphi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)\,dt + f(s)$$

для любой f из $L_2[0,1]$, если $K(s,t)$ – ограниченная функция.

Рассмотрим оператор $A\varphi = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$.

Имеем

$$|A^n\varphi_1 - A^n\varphi_2|^2 = \left|\int_0^s K(s,t)A^{n-1}(\varphi_1-\varphi_2)\,dt\right|^2 \leq$$

$$\leq \int_0^s |K(s,t)|^2 dt \cdot \int_0^s |A^{n-1}(\varphi_1-\varphi_2)|^2 dt \leq sM^2 \int_0^s |A^{n-1}(\varphi_1-\varphi_2)|^2 dt,$$

где $|K(s,t)| \leq M$ для любых $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$. Отсюда

$$\|A^n\varphi_1 - A^n\varphi_2\|^2 = \int_0^1 |A^n(\varphi_1-\varphi_2)|^2 ds \leq$$

$$\leq \int_0^1 sM^2 \int_0^s s_1 M^2 \int_0^{s_1} s_2 M^2 \ldots \int_0^{s_{n-1}} |\varphi_1-\varphi_2|^2 d s_n \leq$$

$$\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|^2 \int_0^1 sM^2 \int_0^s s_1 M^2 \int_0^{s_1} s_2 M^2 \ldots \int_0^{s_{n-2}} s_{n-1} M^2 d s_{n-1} =$$

$$= \|\varphi_1-\varphi_2\|^2 \frac{M^{2n}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}.$$

Поэтому, начиная с некоторого n_0 оператор A^n при $n \geq n_0$ – сжимающее отображение. Следовательно, уравнение

$$\varphi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt$$

имеет единственное нулевое решение. Осталось воспользоваться альтернативой Фредгольма.

3.6. Спектр линейного оператора

Определение. Число λ называется регулярным для оператора A, действующего в банаховом пространстве X, если оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, называемый резольвентой оператора A, определен на всем X и, следовательно, ограничен.

Совокупность всех остальных значений λ называется спектром оператора A. Совокупность собственных значений оператора A называется точечным спектром. Совокупность тех λ, для которых оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, но определен не на всем X, называется непрерывным спектром.

Теорема. Регулярные точки образуют открытое множество, а спектр – замкнутое.

Теорема. Если A – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X и $|\lambda| > \|A\|$, то λ – регулярная точка.

Пример 1. Пусть $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = t\,x(t),\ [(A-\lambda I)(x)](t) = (t-\lambda)x(t) = g(t),$$

$$[(A - \lambda I)^{-1} g](t) = \frac{1}{t-\lambda}\, g(t).$$

Следовательно, $\sigma = [a, b]$ – непрерывный спектр.

Пример 2. Пусть $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Af)(x) = x f(x) + 2f(0),\quad f \in C[0,1].$$

Отсюда

$$(A - \lambda I) f(x) = (x-\lambda) f(x) + 2f(0) = g(x);\ -\lambda f_0 = g(0) - \alpha f(0);\quad f(x) = \frac{g(x) - 2f(0)}{x - \lambda};\quad f(0) = \frac{g(0) - 2f(0)}{-\lambda}.$$

Следовательно,

$$f(0) = \frac{g(0)}{2-\lambda};\quad f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} + \frac{g(0)}{(2-\lambda)(x-\lambda)}.$$

Получаем, что спектр равен $[0,1] \cup \{2\}$. Точка спектра $\lambda = 2$ является собственным значением. Найдем собственную функцию, отвечающую собственному значению 2:

$$(A - 2I) f = 0;\quad x f(x) + 2f(0) = 2f(x);$$

$f(x) = \dfrac{2f(0)}{2-x}$ – собственная функция, отвечающая собственному значению 2.

Задачи

1. В $C[-\pi, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

а) $(Ax)(t) = x(-t)$;

б) $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)\, x(s) ds$.

Ответ. а) Собственному значению $\lambda = 1$ соответствует собственное подпространство четных функций, собственному значению $\lambda = -1$ – подпространство нечетных функций.

б) $\lambda_1 = \pi$, $x_1(t) = \cos t$, $\lambda_2 = -\pi$, $x_2(t) = \sin t$; собственному значению $\lambda = 0$ соответствует собственное подпространство $\{\alpha \sin t + \beta \cos t\}^\perp$, где $\alpha, \beta \in R$, а ортогональность понимается в смысле вещественного пространства $L_2[-\pi, \pi]$.

2. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора $(Ax)(t) = d^2x/dt^2$, если:

а) $\Delta(A) = \{x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi],\ x(0) = x(\pi) = 0\}$;

б) $\Delta(A) = \{x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi],\ x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

в) $\Delta(A) = \{x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi],\ x(0) = x(\pi), x'(0) = x'(\pi)\}$.

Ответ: а) $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \sin nt$, $n = 1, 2, \ldots$.

б) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) \equiv 1$, $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \cos nt$, $n = 1, 2, \ldots$.

в) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) \equiv 1$, $\lambda_n = -4n^2$, $x_n(t) = \cos 2nt$, $\sin 2nt$, $n = 1, 2, \ldots$.

3. В пространстве $C[0,2\pi]$ рассмотреть оператор $(Ax)(t)=e^{it}x(t)$. Доказать, что $\sigma(A)=\{\lambda\in C: |\lambda|=1\}$.

4. В пространстве $C[0,1]$ рассмотреть оператор $(Ax)(t)=x(0)+tx(1)$. Найти $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

Ответ. Спектр $\sigma(A)$ состоит из собственного значения $\lambda=1$ с собственным подпространством, порожденным функцией $x(t)=t$, и собственного значения $\lambda=0$ с собственным подпространством $\{x(t)\in C[0,1]: x(0)=x(1)=0\}$,

$$R_\lambda(A)y(t)=-\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)}+\frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{ty(0)}{\lambda(1-\lambda)^2}.$$

5. Доказать, что оператор $A: L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$,

$$(Ax)(s)=\int_{-1}^{1}s^2tx(t)dt,$$

вполне непрерывен и найти его спектр.

Ответ. Спектр $\sigma(A)$ состоит из точки $\lambda=0$, которая является собственным значением бесконечной кратности.

6. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(s)=\int_0^1 st(1-st)x(t)dt,$$

вполне непрерывен и найти его спектр.

Ответ. Спектр $\sigma(A)$ состоит из точки $\lambda=0$ – собственного значения бесконечной кратности и собственных значений λ_1,λ_2, являющихся корнями уравнения $240\lambda^2-32\lambda-1=0$, для которых собственные подпространства одномерны.

7. Найти спектр оператора $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$,

$$(Af)(x)=xf(x)+\int_0^1 f(y)dy,\quad f\in L_2[0,1].$$

Решение. $(A-zI)f=xf(x)-zf(x)+\int_0^1 f(y)dy$.

Пусть $c=\int_0^1 f(y)\,dy$. Тогда

$$(A-zI)f=(x-z)f+c=g(x),\quad f(x)=\frac{g(x)-c}{x-z}.$$

Найдем c:

$$c=\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1\frac{g(y)-c}{y-z}dy=\int_0^1\frac{g(x)dx}{x-z}-c\ln|x-z|\Big|_0^1=$$

$$=\int_0^1\frac{g(x)dx}{x-z}-c\ln\left|\frac{1-z}{-z}\right|,$$

$$c=\int_0^1\frac{g(x)dx}{x-z}\cdot\frac{1}{1+\ln\left|\frac{1-z}{z}\right|}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\left[g(x)-\int_0^1\frac{g(x)dx}{x-z}\cdot\frac{1}{1+\ln\left|\frac{1-z}{z}\right|}\right]/(x-z)\ —$$

резольвента оператора A.

Решим уравнение:

$$1+\ln\left|\frac{1-z}{z}\right|=0,\quad z_1=\frac{1}{1+e^{-1}}<1,\quad z_2=\frac{1}{1-e^{-1}}>1.$$

Следовательно, $\sigma(A)=[0,1]\cup\{z_2\}$.

Покажем, что $z_2=\frac{e}{e-1}$ – собственное значение, и найдем соответствующие ему собственные функции:

$$Af=z_2f;\ xf(x)+\int_0^1 f(y)dy=z_2f(x);\ (x-z_2)f(x)=-\int_0^1 f(y)dy;$$

$$f(x)=\frac{1}{z_2-x}\int_0^1 f(y)dy=\frac{1}{\frac{e}{e-1}-x}\int_0^1 f(y)dy=\frac{\mathrm{const}(e-1)}{e+x-ex}.$$

8*. Для произвольной последовательности $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$ рассмотреть линейный оператор $A_\alpha: l_1\to l_1$, $A(x_1,x_2,\dots)=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\dots)$.

а) При каких α A_α определен всюду?

б) При каких α A_α компактен?

в) При каких α A_α – сжимающее отображение?

г) Найти спектр A_α.

д) При каких α множество $\mathrm{Im}\,A_\alpha$ замкнуто?

Решение. а) Если $\sup_i|\alpha_i|<\infty$, то $\|Ax\|\le\sup_i|\alpha_i|\times\|x\|\ \forall x$. Поэтому оператор A_α определен всюду. Иначе существует последовательность номеров n_k таких, что $|\alpha_{n_k}|>k^2$.

Тогда оператор не определен на $x=(x_1,x_2,\dots)$, где $x_{n_k}=\frac{1}{k^2}$, $k=1,2,\dots$; $x_i=0$ при $i\notin\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

б) Достаточно проверить предкомпактность образа шара с единичным радиусом. Если $\lim\limits_{n}|\alpha_k|\neq 0$, то для некоторой подпоследовательности α_{n_k} и $c>0$ имеем $|\alpha_{n_k}|>c$. Поэтому из $\{Ae_{n_k}\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_k|=0$, то из последовательности Ax_n, где $\|x_n\|\leqslant 1$, $n=1,2,\dots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по каждой координате. И очевидно, что эта сходимость будет сильной.

в) Если $\sup\limits_i|\alpha_i|<1$, то $\|A_\alpha x\|=\sup|\alpha_i|\cdot\|x\|$ для любых x и отображение A_α – сжимающее.

Иначе $\|A_\alpha\|\geqslant 1$. Поэтому A_α – не сжимающее отображение.

г) Очевидно, что $(A-\alpha_i I)(e_i)=0$. Поэтому $\{\alpha_i\}\subseteq\sigma(A)$, Но спектр замкнут, поэтому и $\{\overline{\alpha}_i\}\subseteq\sigma(A)$. Докажем, что $\sigma(A)=\{\overline{\alpha}_i\}$. Пусть $\lambda_0\notin\{\overline{\alpha}_i\}$, тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что $\{\lambda:|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}\cap\{\overline{\alpha}_i\}=\phi$. Поэтому оператор $B(x_1,x_2,\dots)=\left(\frac{x_1}{\alpha_1-\lambda_0},\frac{x_2}{\alpha_2-\lambda_0},\dots\right)$ ограничен и $B(A-\lambda_0 I)=(A-\lambda_0 I)B=I$.

д) Положим $\tilde{l}_1=\{x=(x_1,x_2,\dots)\in l_1: x_i=0$ при $\alpha_i=0$, $i=1,2,\dots\}$. Тогда оператор $A_\alpha(\tilde{l}_1)=A_\alpha(l_1)A_\alpha$ в подпространстве $\tilde{l}_1$ не имеет собственных векторов. По теореме Банаха он обратим в точности тогда, когда множество $\operatorname{Im}A_\alpha$ замкнуто, т.е. $0\notin\sigma(A_\alpha|_{\tilde{l}_1})$, т.е. $0\notin\overline{(\{\alpha_i\}_i\setminus\{0\})}$ (см. п. г).

9*. Найти спектр преобразования Фурье F в $L_2(R)$,

где $F(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}f(t)\,dt$.

По формуле обращения имеем $F^*F=FF^*=I$, где
$$F^*f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda t}\,dt.$$

Но $F^*f(\lambda)=Ff(-\lambda)$. Поэтому $F^2f(t)=f(-t)$ и $F^4=I$.

Так как $(1-\lambda^4)I=F^4-\lambda^4 I=(F-\lambda I)(F^3+\lambda F^2+\lambda^2F+\lambda^3 I)$, то (см. задачу 4, подразд. 3.2) при $\lambda^4\neq 1$ оператор $F-\lambda I$ имеет обратный оператор, определенный на всем $L_2(R)$.
В силу теоремы Банаха оператор $(F-\lambda I)^{-1}$ ограничен, поэтому $\sigma(F)\subseteq\{\lambda:\lambda^4=1\}$. Собственные функции оператора F, отвечающие всем собственным значениям $\pm$I, $\pm i$, легко находятся методом неопределенных коэффициентов среди функций $P_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, т.е. $\sigma(F)=\{\lambda\mid\lambda^4=1\}$.

10. Рассмотреть пространство $l_2=\{x=(x_1,x_2,\dots)\mid\sum_i x_i^2<\infty\}$ и оператор
$$A: l_2\to l_2,\quad (Ax)_n=x_{n-1}+\alpha x_n+x_{n+1}.$$
Найти спектр оператора A.

Решение. Представим оператор A в виде теплицевой матрицы:
$$A=\begin{pmatrix}\ddots & & & & \\ & \ddots & & 0 & 0\\ & 1 & \alpha & 1 & \\ & & 1 & \alpha & 1\\ 0 & & & & \ddots\end{pmatrix}.$$

Сделаем преобразование Фурье. Каждой последовательности $x\in l_2$ ставим в соответствие функции $f\in L_2[0,2\pi]$:
$$x=(\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots)\to f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}},$$
где $\{e^{i\pi t}/\sqrt{2\pi}\}$ – базис пространства $L_2[0,2\pi]$.

Тогда вектору $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$, где $y_n=(Ax)_n$, соответствует функция
$$\Psi(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}y_n\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}=\sum_{-\infty}^{\infty}(x_{n-1}+\alpha x_n+x_{n+1})\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}=$$
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}x_n\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha\frac{x_n e^{int}}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{-\infty}^{\infty}x_{n+1}\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}=$$
$$=(e^{it}+\alpha e^{-it})f(t)=(2\cos t+\alpha)f(t).$$

Следовательно, наш оператор $A: l_2 \to l_2$ переходит в оператор $\widetilde{A}: L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$,

$$(\widetilde{A}f)(t) = (2\cos t + \alpha)f(t).$$

Найдем резольвенту и спектр оператора $\widetilde{A}$:

$$(\widetilde{A} - zI)f = (2\cos t + \alpha - z)f(t) = g(t),$$

$$f(t) = g(t)/(2\cos t + \alpha - z).$$

Следовательно, $\sigma(\widetilde{A}) = [\alpha - 2, \alpha + 2] = \sigma(A)$.

Итак, бесконечная матрица A имеет непрерывный спектр $[\alpha-2, \alpha+2]$.

11. Найти спектр и резольвенту оператора $A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$,

$$(Af)(x) = \cos x\, f(x) + \int_0^{2\pi} f(y)\,dy,$$

где $f \in L_2[0,2\pi]$.

Решение.

$$(A - zI)f = g; \quad (\cos x - z)f(x) + \int_0^{2\pi} f(y)dy = g(x).$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{g(x) - c}{\cos x - z},$$

где $c = \int_0^{2\pi} f(y)\,dy$.

Отсюда

$$c = \int_0^{2\pi} f(y)dy = \int_0^{2\pi} \frac{g(y)-c}{\cos y - z}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{g(y)dy}{\cos y - z} - c\int_0^{2\pi} \frac{dy}{\cos y - z}.$$

Следовательно,

$$c = \frac{1}{1+F(z)} \int_0^{2\pi} \frac{g(y)dy}{\cos y - z},$$

где $$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dy}{\cos y - z}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{g(x)}{\cos x - z} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{g(y)dy}{\cos y - z}}{(1+F(z))(\cos x - z)}.$$

Отсюда видно, что $\sigma(A) = [-1,1] \cup \{z_0\}$, где z_0 – корень уравнения $F(z) = -1$, $z_0 > 1$.

12. Найти спектр и резольвенту оператора $A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$, $(Af)(x) = x^2 f(x) + \int_0^1 xyf(y)\,dy$.

13. Найти спектр оператора $A: l_2 \to l_2$,

$$(Ax)_n = x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + e^{-|n|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|m|} x_m,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2.$$

Ответ: $\sigma(A) = [-1,3]$.

14. Доказать, что в гильбертовом пространстве для оператора A имеет место $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$, где $\sigma(B)$ – спектр оператора B, а $\overline{X}$ – комплексно-сопряженное к X множество.

Доказательство. Заметим, что $(AB)^* = B^* A^*$. Поэтому, если $CC^{-1} = C^{-1}C = I$, то $C^*(C^{-1})^* = (C^{-1})^* C^* = I^* = I$.

Следовательно, если у B есть ограниченный обратный оператор, то B^* также имеет ограниченный обратный оператор. Так как $B^{**} = B$, то это справедливо и в обратную сторону. Осталось заметить, что $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$.

15. Доказать, что если оператор A обратим, то $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ для любого оператора B, где $\sigma(C)$ – спектр оператора C.

Указание. В силу равенства $AB = A(BA)A^{-1}$ операторы AB и BA сопряжены, а такие операторы имеют одинаковые спектры.

16. а) Доказать, что для любых ограниченных линейных операторов A и B $AB - BA \neq I$. б) Изменится ли ответ, если не требовать ограниченности?

Решение. а) Предположим противное. Пусть существует обратный оператор к A. Тогда $AB = A(AB-I)A^{-1}$. То есть AB и $AB-I$ сопряжены. Но это невозможно, так как тогда $\sigma(AB) = \sigma(AB-I) = \sigma(AB)-1$ и спектр AB инвариантен относительно сдвига, но он ограничен.

Если не существует обратный оператор к A, то заметим, что равенство $AB-BA=I$ можно переписать в виде $(A-\lambda I)B-B(A-\lambda I)=I$ и подобрать $\lambda \notin \sigma(A)$.

б) В пространстве многочленов рассмотрим операторы $A(P)=P'$, $B(P)=xP$. Очевидно, что $AB-BA=I$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ / Пер. с англ. М.: Мир, I977.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, I98I.

3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, I984.

4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, I988.

5. Ахиезер Н.И., Глазман Н.М. Теория линейных операторов. М.: Наука, I966.

6. Голосов А.О., Нарайкин О.С., Храпов П.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Изд-во МГТУ, I990.

7. Агеев О.Н. Элементы теории множеств и теории меры: Методические указания к решению задач. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, I995.

Приложение

Таблица наиболее часто встречающихся в функциональном анализе пространств

Обозначение	Название пространства E	Норма	Является ли банаховым?	Сепарабельность	Можно ли ввести скалярное произведение, определяющее ту же норму	E^* (сопряженное пространство)
I	2	3	4	5	6	7
l_1	$\{x=(x_1,x_2,\dots):\sum_i \lvert x_i\rvert<\infty\}$	$\lVert x\rVert=\sum_i \lvert x_i\rvert$	Да	Да	Нет	m
l_p $(p>1)$	$\{x=(x_1,x_2,\dots): \sum_i \lvert x_i\rvert^p<\infty\}$	$\lVert x\rVert = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p}$	Да	Да	Только при $p=2$ $(x,y)=\sum_i x_i y_i$	l_q, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$C[a,b]$	Пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$	$\lVert f\rVert = \sup_{x\in[a,b]} \lvert f(x)\rvert$	Да	Да	Нет	Пространство функций g ограниченной вариации, непрерывных слева всюду, кроме точки b (возможно), $g(a)=0$ и $\lVert g\rVert = V_a^b g$

I	2	3	4	5	6	7
$C^1[a,b]$	Пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$	$\|f\| = \sup_x \|f(x)\| + \sup_x \|f'(x)\|$	Да	Да	Нет	
c_0	$\{x=(x_1,x_2,\dots): \lim_n x_n = 0\}$	$\|x\| = \sup_n \|x_n\|$	Да	Да	Нет	l_1
c_1	$\{x=(x_1,x_2,\dots): \exists \lim_n x_n\}$	$\|x\| = \sup_n \|x_n\|$	Да	Да	Нет	l_1
m	$\{x=(x_1,x_2,\dots): \sup_n \|x_n\| < \infty\}$	$\|x\| = \sup_n \|x_n\|$	Да	Нет	Нет	
$L_1[a,b]$	Пространство классов эквивалентности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке $[a,b]$	$\|f\| = \int_{[a,b]} \|f(x)\| dl$	Да	Да	Нет	$L_\infty[a,b]$
$L_p[a,b]$ $(p>1)$	Пространство классов эквивалентности таких функций f, что f^p интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,b]$	$\|f\| = \sqrt[p]{\int_{[a,b]} \|f\|^p dl}$	Да	Да	Только при $p=2$ $(f,g)=\int fg\,dl$	$[L_q[a,b]$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$L_\infty[a,b]$	$\{f: f$ измерима на $[a,b]$ $\exists c, \|f(x)\|<c$ для почти всех x	$\|f\| = \inf\{c: \|f(x)\|<c$ для почти всех $x\}$	Да	Нет	Нет	
$L_1(R)$	Пространство классов эквивалентности интегрируемых по Лебегу функций на вещественной прямой R	$\|f\| = \int_R \|f\| dl$	Да	Да	Нет	$L_\infty(R)$
$L_p(R)$ $(p>1)$	Пространство классов эквивалентности таких функций f, что f^p интегрируема по Лебегу на R	$\|f\| =$ $\|f\| = \sqrt[p]{\int_R \|f\|^p dl}$	Да	Да	Только при $p=2$ $(f,g)=\int fg\,dl$	$L_q(R)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$