Типовой расчет по прикладному функциональному анализу для РК5-21М

Преподаватель доцент, к.ф.-м.н. Храпов П.В.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.Н.Агеев, П.В.Храпов. Функциональный анализ. Методические указания к решению задач. МГТУ, 1997 г.
2. А.О.Голосов, О.С.Нарайкин, П.В.Храпов . Прикладной функциональный анализ. МГТУ, 1990 г.
3.Колмогоров А.Н., Фомин С.В.. Элементы теории функций и функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981 г.
4.Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
5.Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
6.Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

Вариант 1.

1. Найти расстояние между функциями

$f(t)=t+1$ и $g(t)=t^2+2t-3$

В пространстве непрерывных функций C[0,1] с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{[0,1]} | f(t)-g(t) |$$

б) В пространстве непрерывных функций C_2 [0,1] с метрикой

$$\rho(x,y)= \left(\int_a^b | f(t)-g(t) |^2 dt\right)^{1/2}$$

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4}dy = 1 \ , \quad f \in C[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(2x-1)dx \quad , \quad f \in C[0,1]$$

4. Оценить норму линейного оператора.

A: C[0,1] $\to$ C[0,1] , $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

5. В $C[-\pi,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=x(-t)$;

$(Ax)(t)= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$

6. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (x+y^2+\alpha) f(y)dy = 1+\beta x^2$$

Найти такое β , чтобы это уравнение было разрешимо при любом α .

Вариант 2.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv \sin \pi t$, $x_3(t) \equiv \cos \pi t$ в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(x_m)}{m^2+n^2+16} = 1 \text{ , } n=1, 2, \ldots \text{ , } x=(x_1, x_2,\ldots) \in m.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in C[-1,1]$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

A: $C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(0)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi], x(0)=x(\pi)=0 \};$

6. Доказать, что тождественный оператор в пространстве $L_2[0,1]$ не является интегральным (с ядром Гильберта-Шмидта).

Вариант 3.

Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=e^t$, $x_3(t)=\cos(\pi t)$

в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{m^2+n^2+16} = 1/(n^2)$, n =1, 2, … , $x=(x_1, x_2,\ldots) \in l_2$.

3. Найти норму линейного функционала:

$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_2[-1,1]$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

A: C[0,1] $\rightarrow$ C[0,1] , $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi] , x'(0)=x'(\pi)=0 \}$;

6. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$$\phi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$$

для любой f из $L_2[0,1]$, если K(s,t) – ограниченная функция.

Вариант 4.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$

в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{m^2+n^2+16} = 1 \text{ , } n=1, 2, \dots \text{ , } x=(x_1, x_2,\dots) \in m.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_2[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

$A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2 x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi] , x'(0)=x'(\pi)=0 \}$;

6. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$$\phi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$$

для любой f из $L_2[0,1]$, если $K(s,t)$ – ограниченная функция.

Вариант 5.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$

в евклидовом пространстве $L_2[0,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{(m+n)^2+16} = 1/n^2 , \; n=1, 2, \dots \; , x=(x_1, x_2,\dots) \in l_2.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_3[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор A вполне непрерывен

A: $L_2\ [0,+\infty) \to L_2\ [0,+\infty)$,

$$(Af)(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x^2+y^2+1}\, dy \ .$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x)=xf(x)+\int_0^1 yf(y)dy$$

6. В пространстве $L_2[0,1]$ найти проекцию элемента $x(t)=t^3$ на подпространство многочленов степени m<=n, если n=0,1,2.

Вариант 6.

1. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса лежать строго внутри шара меньшего радиуса ?

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+5} dy = x^2 \quad , \quad f \in C[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_{-1}^1 xf(x)dx \quad , \quad f \in L_1[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор A вполне непрерывен

A: $L_2\ [0,1] \to L_2\ [0,1]$,

$$(Af)(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x^2+y^2+1}\,dy \quad .$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x)=xf(x)+\int_0^1 \cos(y)f(y)dy$$

6. При каких λ в пространстве $L_p[a,b]$ существует решение уравнения

$$f(x) = 1 + \lambda \int_a^b e^{x-y}f(y)dy \quad ?$$

Вариант 7.

1. Является ли метрическим пространством множество X=R, если

ρ (x,y)=|sin(x-y)| ?

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+5}dy = x^2 \quad , \quad f \in L_2[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_{-1}^1 xf(x)dx \quad , \quad f \in L_5[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор A вполне непрерывен

$A:\ L_2\ [0,1] \to L_2\ [0,1]$,

$$(Ax)(s) = \int_0^{\infty} s^2\, t x(t)\, dt$$

вполне непрерывен и найти его спектр .

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x)=x^2 f(x)+\int_0^1 xyf(y)dy .$$

6. Пусть $f(x) \in L_2\ [0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (xy^2+\alpha)f(y)dy = x+\beta$$

При каких β это уравнение разрешимо для любого α ?

Вариант 8.

1. Является ли метрическим пространством множество X=R, если

ρ (x,y)=|cos(x)-cos(y)| ?

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+5}dy = x^2 , \quad f \in C[0,1]$$

3. Изобразить единичный замкнутый шар $S_1(0)=\{x: \|x\| \le 1\}$ в пространствах

R_1^2 , R_2^2 , R_3^2 , R^2_∞ .

4. Множество $A \subset X$ называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки A, целиком лежит в A. Будет ли выпуклым в пространстве C[0,1] множество :
многочленов степени n=k ;
многочленов степени $n \le k$;
непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|dt \le 1 ;$$

d)

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \le 1 ;$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$$(Af)(x)=\cos(x)\, f(x)+ \int_0^{2\pi} f(y)dy .$$

6. Пусть $f(x) \in L_2\ [0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (xy^2+\alpha)f(y)dy = x+\beta$$

При каких β это уравнение разрешимо для любого α ?

Вариант 9.

1. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X . Доказать, что функции

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \quad \rho_2(x,y) = \ln|1+\rho(x,y)|, \quad \rho_3(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$$

также являются метриками. Что можно утверждать о полноте получающихся пространств, если в метрике $\rho(x,y)$ множество X было полным метрическим пространством ?

Пусть отображение $\Phi(x)$ переводит замкнутое множество $Q \subset X$ в себя и при некотором натуральном m отображение

$$\Phi^m(x)=\Phi[\Phi[\ldots[\Phi(x)]\ldots]]$$

является сжимающим на Q. Доказать, что в Q существует единственная неподвижная точка отображения $\Phi(x)$ и что итерации $x_n=\Phi(x_{n-1})$, $n \in N$ сходятся к ней при любом $x_0 \in Q$.

3. Можно ли в множестве R_p^n положить

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

если $p<1$, $m \geq 2$.

4. Найти норму линейного функционала

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x_n, \quad x \in l_2 .$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$$(Af)(x)=\sin(x) f(x)+\int_0^{2\pi} f(y)dy .$$

6. Доказать, что если оператор A обратим, то $\sigma(AB)=\sigma(BA)$ для любого оператора B, где $\sigma(C)$ – спектр оператора C.

Вариант 10.

1. Найти расстояние между элементами

$x=(1,1/2,1/3,\ldots,1/n,\ldots)$ и $y=(1/2,1/3,1/4,\ldots,1/(n+1),\ldots)$

в пространстве l_2 ;

в пространстве l_3 ;
в пространстве m ;

2.Доказать предкомпактность следующих множеств функций $f\in C[0,1]$, представимых в виде :

a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+x^2}$, $|b_n|\le 1/n^2$, n=1,2,… .

b) $f(x)=\int_0^1 \frac{\varphi(y)}{x^2+y^2+1}dy$, $|\varphi(y)|\le 1$, $y\in[0,1]$.

3. Будет ли множество всех многочленов в пространстве C[a,b] :

a) открытым ;
b) замкнутым.

4. Найти норму линейного функционала

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k x(t_k)$, $x\in C[-1,1]$.

5. Найти спектр и резольвенту оператора

A: $L_2[0,2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$(Af)(x)=x^3 f(x)+\int_0^{2\pi} xyf(y)dy$.

6. Доказать, что оператор А ограничен и оценить его норму

A: $C^1[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)= t^2 x(0)$.

Вариант 11.

1. Найти расстояние между функциями

f(t)=t+1 и $g(t)=t^2+2t-3$

В пространстве непрерывных функций C[0,1] с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{[0,1]} | f(t)-g(t) |$$

б) В пространстве непрерывных функций C_2 [0,1] с метрикой

$$\rho(x,y)= \left(\int_a^b | f(t)-g(t) |^2 dt\right)^{1/2}$$

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4}dy = 1 , \quad f \in C[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(2x-1)dx \quad , \quad f \in C[0,1]$$

4. Оценить норму линейного оператора.

$$A: C[0,1] \to C[0,1] , \ (Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

5. В $C[-\pi,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

(Ax)(t)=x(-t) ;

$$(Ax)(t)= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$$

6. Пусть $f(x) \in L_2$ [0,1] ,

f(x) + $\int_0^1 (x + y^2 + \alpha) f(y) dy = 1 + \beta x^2$

Найти такое β , чтобы это уравнение было разрешимо при любом α .

Вариант 12.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv \sin \pi t$, $x_3(t) \equiv \cos \pi t$ в евклидовом пространстве L_2[-1,1].

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(x_m)}{m^2 + n^2 + 16} = 1$, n =1, 2, … , x=(x_1, x_2,…) $\in$ *m*.

3. Найти норму линейного функционала:

$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x - 2) dx$, $f \in C[-1,1]$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

A: C[0,1] $\rightarrow$ C[0,1] , (Ax)(t) = t^2 x(0) .

5. В вещественном линейном пространстве C[$0, \pi$] найти собственные значения и собственные векторы оператора:

(Ax)(t)=$d^2 x / dt^2$, если область определения оператора A

Δ(A) ={ x(t) $\in$ C[0,π] : x” $\in$ C[0,π] , x(0)=x(π)=0 };

6. Доказать, что тождественный оператор в пространстве $L_2[0,1]$ не является интегральным (с ядром Гильберта-Шмидта).

Вариант 13.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=e^t$, $x_3(t)=\cos(\pi t)$

в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{m^2+n^2+16} = 1/(n^2),\ n=1, 2, \ldots,\ x=(x_1, x_2, \ldots) \in l_2.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_2[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

A: $C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi],\ x'(0)=x'(\pi)=0 \}$;

6. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$$\phi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$$

для любой f из $L_2[0,1]$, если K(s,t) – ограниченная функция.

Вариант 14.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$

в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{m^2+n^2+16} = 1 , \quad n=1, 2, \ldots , \quad x=(x_1, x_2,\ldots) \in m.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_2[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

$A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2 x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) =\{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi] , x'(0)=x'(\pi)=0 \};$

6. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$$\phi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$$

для любой f из $L_2[0,1]$, если K(s,t) – ограниченная функция.

Вариант 15.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$

в евклидовом пространстве $L_2[0,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{(m+n)^2+16} = 1/n^2,\ n=1,2,\ldots,\ x=(x_1,x_2,\ldots) \in l_2.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_3[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор A вполне непрерывен

$A: L_2[0,+\infty) \to L_2[0,+\infty)$,

$$(Af)(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(y)}{x^2+y^2+1}dy \quad .$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x)=xf(x)+\int_0^1 yf(y)dy$$

6. В пространстве $L_2[0,1]$ найти проекцию элемента $x(t)=t^3$ на подпространство многочленов степени $m<=n$, если $n=0,1,2$.

Вариант 16.

1. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса лежать строго внутри шара меньшего радиуса ?

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+5}dy = x^2 \quad , \quad f \in C[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx \quad , \quad f \in L_1[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор A вполне непрерывен

A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Af)(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x^2+y^2+1} dy \quad .$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x)=xf(x)+\int_0^1 \cos(y)f(y)dy$$

6. При каких λ в пространстве $L_p[a,b]$ существует решение уравнения

$$f(x) = 1 + \lambda \int_a^b e^{x-y}f(y)dy \quad ?$$

Вариант 17.

1. Является ли метрическим пространством множество X=R, если

$\rho(x,y)=|\sin(x-y)|$?

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+5}dy = x^2 \quad , \quad f \in L_2[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx \quad , \quad f \in L_5[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор A вполне непрерывен

$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(s) = \int_0^\infty s^2 tx(t)\, dt$$

вполне непрерывен и найти его спектр .

5. Найти спектр и резольвенту оператора

A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x)=x^2 f(x)+\int_0^1 xyf(y)dy .$$

6. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x)+\int_0^1 (xy^2+\alpha)f(y)dy = x+\beta$$

При каких β это уравнение разрешимо для любого α ?

Вариант 18.

1. Является ли метрическим пространством множество X=R, если

$\rho(x,y)=|\cos(x)-\cos(y)|$?

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x)+\int_0^1 \frac{f(y)}{x+y+5}dy = x^2 , \quad f \in C[0,1]$$

3. Изобразить единичный замкнутый шар $S_1(0)=\{x: \|x\| \le 1\}$ в пространствах

R_1^2, R_2^2, R_3^2, R^2_∞ .

4. Множество $A \subset X$ называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки A, целиком лежит в A. Будет ли выпуклым в пространстве C[0,1] множество :
многочленов степени n=k ;
многочленов степени $n \le k$;
непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|dt \le 1 ;$$

d)

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \le 1 ;$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$$(Af)(x)=\cos(x) f(x)+ \int_0^{2\pi} f(y)dy .$$

6. Пусть $f(x) \in L_2\ [0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (xy^2+\alpha)f(y)dy = x+\beta$$

При каких β это уравнение разрешимо для любого α ?

Вариант 19.

1. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X . Доказать, что функции

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \quad \rho_2(x,y) = \ln|1+\rho(x,y)|, \quad \rho_3(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$$

также являются метриками. Что можно утверждать о полноте получающихся пространств, если в метрике $\rho(x,y)$ множество X было полным метрическим пространством ?

Пусть отображение $\Phi(x)$ переводит замкнутое множество $Q\subset X$ в себя и при некотором натуральном m отображение

$$\Phi^m(x)=\Phi[\Phi[\ldots[\Phi(x)]\ldots]]$$

является сжимающим на Q. Доказать, что в Q существует единственная неподвижная точка отображения $\Phi(x)$ и что итерации $x_n=\Phi(x_{n-1})$, $n\in N$ сходятся к ней при любом $x_0 \in Q$.

3. Можно ли в множестве R_p^n положить

$$||x||=\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

если $p<1$, $m\geq 2$.

4. Найти норму линейного функционала

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x_n , \; x\in l_2 .$$

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$$(Af)(x)=\sin(x) f(x)+\int_0^{2\pi} f(y)dy .$$

6. Доказать, что если оператор A обратим, то $\sigma(AB)=\sigma(BA)$ для любого оператора B, где $\sigma(C)$ – спектр оператора C.

Вариант 20.

1. Найти расстояние между элементами

x=(1,1/2,1/3,…,1/n,…) и y=(1/2,1/3,1/4,…,1/(n+1),…)

в пространстве l_2 ;
в пространстве l_3 ;
в пространстве m ;

2.Доказать предкомпактность следующих множеств функций $f\in C[0,1]$, представимых в виде :

a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+x^2}$, $|b_n| \le 1/n^2$, n=1,2,… .

b) $f(x)=\int_0^1 \frac{\varphi(y)}{x^2+y^2+1}dy$, $|\varphi(y)| \le 1$, $y \in [0,1]$.

3. Будет ли множество всех многочленов в пространстве C[a,b] :

a) открытым ;
b) замкнутым.

4. Найти норму линейного функционала

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k x(t_k)$, $x \in C[-1,1]$.

5. Найти спектр и резольвенту оператора

$A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$(Af)(x)=x^3 f(x)+\int_0^{2\pi} xyf(y)dy$.

6. Доказать, что оператор A ограничен и оценить его норму

$A: C^1[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)= t^2 x(0)$.

Вариант 21.

1. Найти расстояние между функциями
$f(t)=t+1$ и $g(t)=t^2+2t-3$
В пространстве непрерывных функций C[0,1] с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{[0,1]} | f(t)-g(t) |$$

б) В пространстве непрерывных функций C_2 [0,1] с метрикой

$$\rho(x,y)= \left(\int_a^b | f(t)-g(t) |^2 dt \right)^{1/2}$$

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(y)}{f^2(y) + x^2 + y^2 + 4} dy = 1 \ , \quad f \in C[0,1]$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(2x-1)dx \ , \quad f \in C[0,1]$$

4. Оценить норму линейного оператора.

$$A: C[0,1] \to C[0,1] \ , \ (Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

5. В $C[-\pi,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=x(-t)$;

$$(Ax)(t)= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$$

6. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (x + y^2 + \alpha) f(y)dy = 1 + \beta x^2$$

Найти такое β , чтобы это уравнение было разрешимо при любом α .

Вариант 22.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv \sin \pi t$, $x_3(t) \equiv \cos \pi t$ в евклидовом пространстве L_2[-1,1].

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(x_m)}{m^2 + n^2 + 16} = 1 \text{ , } n = 1, 2, \ldots \text{ , } x=(x_1, x_2,\ldots) \in m.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in C[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

A: $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(0)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2 x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi] , x(0)=x(\pi)=0 \}$;

6. Доказать, что тождественный оператор в пространстве $L_2[0,1]$ не является интегральным (с ядром Гильберта-Шмидта).

Вариант 23.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=e^t$, $x_3(t)=\cos(\pi t)$

в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{m^2+n^2+16} = 1/(n^2)\ ,\ n=1,2,\ \ldots\ ,\ x=(x_1, x_2,\ldots) \in l_2.$$

3. Найти норму линейного функционала:

$$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_2[-1,1]$$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

$A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2 x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi],\ x'(0)=x'(\pi)=0 \};$

6. Доказать, что в пространстве $L_2\,[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$$\phi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$$

для любой f из $L_2[0,1]$, если $K(s,t)$ – ограниченная функция.

Вариант 24.

1. Найти углы треугольника, вершины которого заданы радиус-векторами

$x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$

в евклидовом пространстве $L_2[0,1]$.

2. Доказать, что следующее уравнение имеет единственное решение в указанном пространстве :

$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m)}{m^2 + n^2 + 16} = 1$, n =1, 2, … , $x=(x_1, x_2,\ldots) \in m$.

3. Найти норму линейного функционала:

$F(f) = \int_0^1 f(x)(3x-2)dx \quad , \quad f \in L_2[-1,1]$

4. Доказать, что линейный оператор ограничен и оценить его норму.

$A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$.

5. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

$(Ax)(t)=d^2 x / dt^2$, если область определения оператора A

$\Delta(A) = \{ x(t) \in C[0,\pi] : x'' \in C[0,\pi] , x'(0)=x'(\pi)=0 \}$;

6. Доказать, что в пространстве $L_2[0,1]$ существует и единственно решение уравнения

$\phi(s) = \int_0^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s)$

для любой f из $L_2[0,1]$, если K(s,t) – ограниченная функция.