Государственный комитет СССР по народному образованию

А.О.Голосов, О.С.Нерайкин, П.В.Храпов

ПРИКЛАДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Утверждено редсоветом МГТУ
как учебное пособие

Под редакцией С.К.Соболева

Издательство МГТУ
1990

ББК 22.162
Г60

Г60 Голосов А.О., Нарейкин О.С., Храпов П.В. Прикладной функциональный анализ: Учеб. пособие / Под ред. С.К.Соболева. - М.: Изд-во МГТУ, 1990. - 74 с., ил.

ISBN 5-7038-0453-1

В учебном пособии изложены теория метрических, нормированных и гильбертовых пространств, принцип сжимающих отображений, теория линейных операторов и элементы спектральной теории. Приведены доказательства основных теорем, имеется большое количество задач с подробным объяснением решения, предложены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов вузов, изучающих курс функционального анализа, для преподавателей и лиц, интересующихся приложениями функционального анализа.

Ил. 7. Библиогр. 5 назв.

Рецензенты: В.Н.Белов, С.И.Тескин.

ББК 22.162

ISBN 5-7038-0453-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ I. Элементы теории множеств

I. Понятие множества. В математике встречаются самые разнообразные множества. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова "множество" его синонимами: совокупность, собрание элементов. Множества мы будем обозначать прописными буквами $A, B, \ldots$, а их элементы – малыми $a, b, \ldots$

2. Операции над множествами. Бесконечные множества. Пусть A и B – произвольные множества.

Определение I. Объединением $C = A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B (рис. I.Iа).

Определение 2. Пересечением $C = A \cap B$ называется множество, состоящее из элементов, содержащихся как в A, так и в B (рис. I.Iб).

Определение 3. Разностью $C = A \setminus B$ множеств A и B называется совокупность тех элементов из A, которые не лежат в B (рис. I.Iв).

Разность $X \setminus E$ (где $E \subset X$) называется дополнением к множеству E (относительно пространства X) и обозначается $\bar{E}$ (рис. I.Iг).

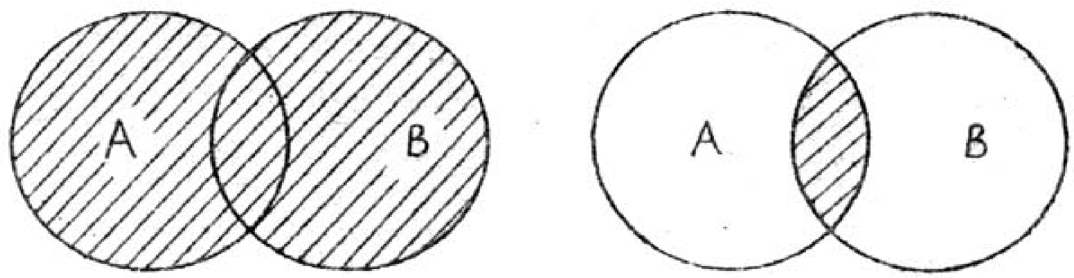
Определение 4. Множество называется бесконечным, если после извлечения из него любого конечного числа элементов в этом множестве еще останутся элементы.

Два конечных множества мы можем сравнить по числу элементов и судить о том, одинаковое это число или в одном из множеств элементов больше.

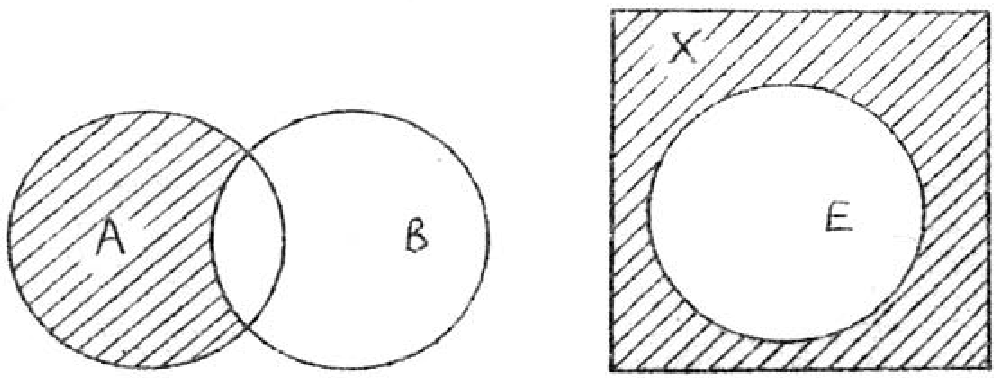
Для сравнения двух множеств можно установить биекцию, т.е. взаимно однозначное соответствие между множествами. Этот способ годится для сравнения как конечных множеств, так и бесконечных.

3. Счетные множества. Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел.

Определение 5. Счетным множеством называется всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить с множеством натуральных чисел.



а) Объединение $C = A \cup B$ б) Пересечение $C = A \cap B$



в) Разность $C = A \setminus B$ г) Дополнение к множеству E

Рис. I.I

Примеры счетных множеств:

I. Z - множество целых чисел.

2. Множество всех четных положительных чисел: $n \longleftrightarrow 2n$.

3. Множество степеней числа 2: $n \longleftrightarrow 2^n$.

4. Множество всех рациональных чисел Q. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$, $q > 0$. Назовем сумму $|p| + q$ <u>высотой</u> рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту I имеет только число 0/I, высоту 2 - числа I/I и -I/I, высоту 3 - числа 2/I, I/2, -2/I, -I/2 и т.д.

Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т.е. сперва выпишем числа высоты I, потом – числа высоты 2 и т.д. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т.е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами. Для положительных рациональных чисел способ нумерации ясен из рис. I.2 /клетке (p, q) соответствует дробь p/q /.

	1	2	3	4	5
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
2	2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$
3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$		
4	4				
5	5				

Рис. I.2

Определение 6. Бесконечное множество, не являющееся счетным называется <u>несчетным</u> множеством.

Свойства счетных множеств:

I. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

2. Объединение любого конечного или счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Доказательство. I. Пусть A – счетное множество, а B – его подмножество. Занумеруем элементы множества A :

$a_1, a_2, \ldots$ Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ – то из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его члены $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ занумерованы числами I, 2, ...

2. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ – счетные множества. Все элементы множеств $A_1, A_2, \ldots$ можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

$$
\begin{array}{lllllll}
A_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
A_4: & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Способ нумерации указан стрелочками (если один и тот же элемент принадлежит нескольким множествам, то мы его учитываем только первый раз). Ясно, что при этом каждый элемент каждого множества получит определенный номер, т.е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми элементами всех множеств $A_1, A_2, \ldots$ и всеми натуральными числами.

3. Пусть M – бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент a_3, отличный от a_1 и a_2, и т.д. Процесс не может оборваться из-за нехватки элементов, так как M бесконечно.

4. Эквивалентность множеств.

Определение 7. Два множества M и N называются эквивалентными ($M \sim N$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Примеры. I. Множество точек на любых двух отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны между собой (рис. I.3).

2. Множество всех точек на расширенной комплексной плоскости эквивалентно множеству всех точек на сфере (рис. I.4).

3. Соответствие $y = \operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim R$.

5. Несчетность множества действительных чисел.

Теорема I. Множество всех действительных чисел в интервале $[0, I]$ несчетно.

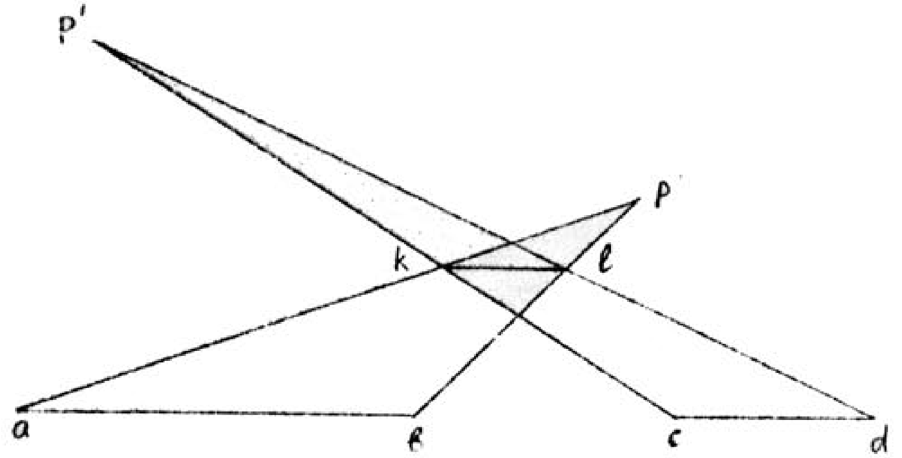


Рис. I.3

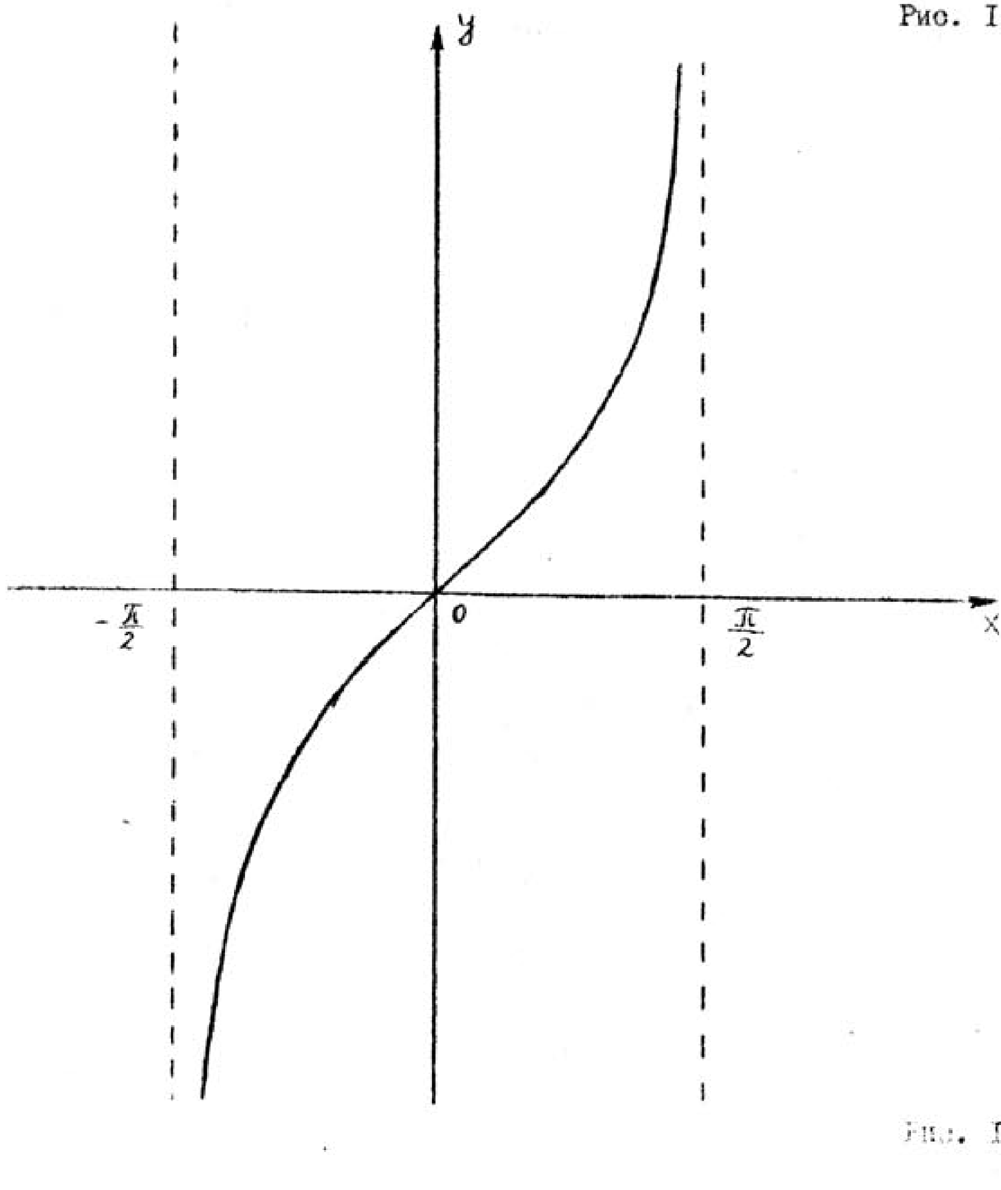


Рис. I.4

Доказательство. Допустим, что оно счетно. Перенумеруем точки. Покроем первую точку интервалом I/I0, вторую – I/I00 и т.д. Таким образом мы покроем все точки. Однако сумма длин всех этих интервалов не превосходит

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{10} \, \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{9} < 1 .$$

Получили противоречие.

Теорема 2 (Кантора – Бернштейна). Пусть A и B – две произвольных множества. Если существует взаимно однозначное отображение f множества A на $B_1 \subset B$ и взаимно однозначное отображение g множества B на подмножество $A_1 \subset A$, то $A \sim B$.

6. Понятие мощности множества.

Определение 8. Два множества M и N имеют одинаковую мощность, если они эквивалентны между собой.

Определение 9. Множества, эквивалентные множеству чисел отрезка $[0, I]$, имеют мощность континуума.

Кантором была высказана континуум-гипотеза (гипотеза о совпадении мощности континуума с первой несчетной мощностью, т.е. об отсутствии промежуточных мощностей). В I963 г. П.Коэн показал невыводимость континуум-гипотезы из аксиом математической логики.

Задачи.

I. Доказать равенства:

а) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

г) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2. Вытекает ли из $A \setminus B = C$, что $A = B \cup C$?

3. Доказать равенства (закон двойственности):

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством N всех натуральных чисел и множеством S всех четных положительных чисел.

5. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, I]$ на интервал $]0, I[$.

6. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[a, b]$ на всю числовую ось?

7. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты?

8. Доказать с помощью теоремы Кантора – Бернштейна эквивалентность замкнутого круга и открытого круга того же радиуса на плоскости.

9. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

10. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел, не содержащих числа 7?

11. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел, содержащих число 7?

§ 2. Метрические пространства

I. Определение и примеры. Неравенство Гельдера. Неравенство Минковского.

Определение I. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества (пространства) X элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$ (аксиома треугольника).

Примеры. I. Пространство изолированных точек,

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}, \quad x,y\in X.$$

2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

3. n-мерное арифметическое евклидово пространство R^n,

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}, \quad x,y\in R^n.$$

Выполнение аксиом I и 2 очевидно. Выполнение третьей аксиомы проверялось в курсе линейной алгебры.

4. Пространство $\ell_2=\{x=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots) \mid \sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty\}$,

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}\ .$$

Неравенство треугольника доказывается предельным переходом при $n\to\infty$ из неравенства треугольника для R^n.

5. Пространство R_1^n,

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|\ ,\quad x,y\in R^n.$$

Проверим выполнение третьей аксиомы:

$$\rho_1(x,z)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|=\sum_{k=1}^{n}|(x_k-y_k)+(y_k-z_k)|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k-z_k|=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z).$$

6. Пространство R_∞^n,

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\leq k\leq n}|y_k-x_k|\ ,\quad x,y\in R^n.$$

Проверим выполнение третьей аксиомы:

$$\rho_\infty(x,z)=\max_{1\leq k\leq n}|x_k-z_k|=\max|(x_k-y_k)+(y_k-z_k)|$$

$$\leq\max_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|+\max_{1\leq k\leq n}|y_k-z_k|=\rho_\infty(x,y)+\rho_\infty(y,z).$$

7. Пространство $C[a,b]$ непрерывных функций с метрикой

$$\rho(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|g(t)-f(t)|\ ,\quad f,g\in C[a,b].$$

Это стандартная метрика в пространстве непрерывных функций.

8. Пространство непрерывных функций с квадратичной метрикой $C_2[a,b]$,

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b(x(t)-y(t))^2dt\right)^{1/2},\quad x(t),y(t)\in C_2[a,b].$$

Выполнение аксиомы треугольника следует из интегрального неравенства Коши – Буняковского:

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\leq\left(\int_a^b x^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b y^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

9. Множество всех ограниченных последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ действительных чисел m

$$\rho(x,y) = \sup_{k} |y_k - x_k| .$$

10. Пространство R^n_p

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} , \quad p \geq 1 .$$

Аксиома треугольника, которую нам надо проверить, примет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{I}$$

где $a_k = y_k - x_k$, $b_k = z_k - y_k$.

Неравенство (I) – это так называемое неравенство Минковского.

Доказательство неравенства Минковского основано на неравенстве Гельдера.

Лемма I (неравенство Гельдера). Имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p, q > 0$.

Напишем интегральное неравенство Гельдера:

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} .$$

II. Пространство $\ell_p = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \}$,

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

2. Непрерывные отображения метрических пространств.

Определение 2. Пусть X и Y – метрические пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in X$, таких, что $\rho_X(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f непрерывно на X. Если $f: X \to Y$ взаимно однозначное (биективное) отображение, то существует обратное отображение $x = f^{-1}(y)$. Если f и f^{-1} непрерывные, то f называется гомеоморфным отображением, или гомеоморфизмом.

Определение 3. Биекция f между метрическими пространствами $R=(X,\rho)$ и $R'=(X',\rho')$ называется изометрией, если

$$\rho(x_1,x_2) = \rho'(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall\, x_1, x_2 \in R .$$

Метрические пространства различаются с точностью до изометрии, т.е. пространства, между которыми установлена изометрия, считаются одним и тем же пространством.

3. Сходимость. Открытые и замкнутые множества. Предельные точки. Замыкание.

Определение 4. Открытым шаром $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве R называется совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < r$, где x_0 – центр шара; r – радиус.

Замкнутым шаром $B[x_0, r]$ называется совокупность $x \in R$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) \le r$.

Определение 5. Множество M называется ограниченным, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Определение 6. Точка $x \in R$ называется точкой прикосновения множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения называется замыканием этого множества $[M]$.

Примеры. I. Множество $M = (a, b) : [M] = [a, b]$.

2. Множество $M = \{x \in (a, b) : x \in Q\}; [M] = [a, b]$.

Свойства операции замыкания:

I. $M \subset [M]$.

2. $[[M]] = [M]$.

3. Если $M_1 \subset M_2$, то $[M_1] \subset [M_2]$.

4. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Определение 7. Точка $x \in R$ называется предельной точкой множества $M \subseteq R$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Отличие предельных точек от точек прикосновения проявляется, например, в изолированных точках.

Определение 8. Последовательность x_n сходится к x, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Пример (рис. 2.I). Пусть

$$R = L_2[-1,1] = \left\{ f(t) \,\Big|\, \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt < \infty \right\},$$

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1, \\ -1, & -1 \le t \le -\frac{1}{n}, \\ nt, & -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}; \end{cases}$$

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le 1, \\ -1, & -1 \le t < 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

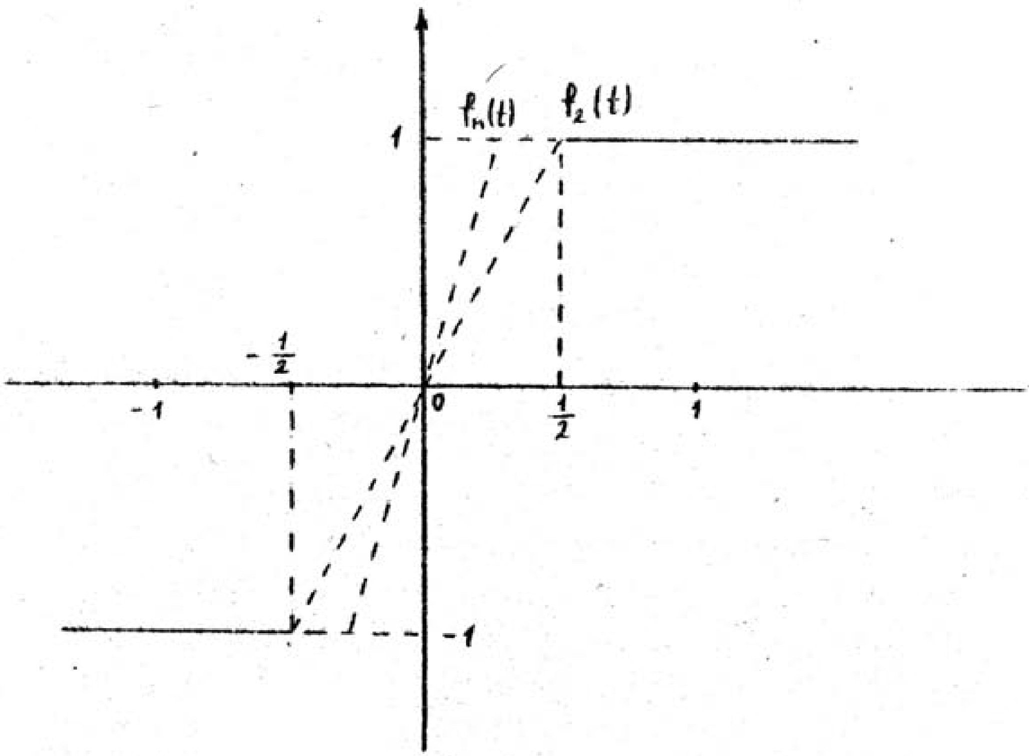


Рис. 2.I

Определение 9. Пусть A и B – два множества в метрическом пространстве R. Множество A называется плотным в B, если $B \subset [A]$.

Множество A называется всюду плотным в R, если $[A]=R$ – все пространство.

Определение 10. Пространство, в котором имеется счетное всюду плотное множество, называется сепарабельным.

Примеры:

а) сепарабельные пространства:

1. На R^1 – множество Q всех рациональных чисел является всюду плотным.

2. В R^n множество Q^n является всюду плотным.

3. В $C[a, b]$, множество $C_2[a, b]$ – совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами;

б) несепарабельное пространство:

$$m = \{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sup_i |x_i| < \infty \}$$

– пространство ограниченных последовательностей.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{M}$ – множество всевозможных последовательностей, состоящих из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуума (так как между ними и подмножествами натурального ряда можно установить взаимно однозначное соответствие).

Окружим каждую из этих точек открытым шаром радиуса 1/2. Они не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в $\mathfrak{M}$ то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы по одной точке этого множества, следовательно, оно не может быть счетным.

Определение 11. Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, называется замкнутым, если $M=[M]$.

Примеры. 1. $[a, b] \subset R^1$; $[a, b]$ – замкнутое множество в R^1.

2. $M = \{ f \in C[a, b] \mid |f(t)| \le K \}$, M – замкнуто.

3. $M_1 = \{ f \in C[a, b] \mid |f(t)| < K \}$, M_1 – не замкнуто.

Определение 12. Точка x – внутренняя точка M, если существует ε – окрестность точки x, $O_\varepsilon(x) \subset M$. Множество, все точки которого внутренние, – открыто.

Примеры. 1. $(a, b) \subset R^1$ – открытое множество.

2. Множество непрерывных функций на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $f(t) < g(t)$, где $g(t)$ – некоторая фиксированная

функция, открыто в $C[a,b]$.

4. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

Определение I3. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R называется <u>фундаментальной</u>, если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$, такое, что

$$\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon \quad \forall\ n' > N_\varepsilon,\ n'' > N_\varepsilon .$$

Определение I4. Если в пространстве R любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется <u>полным</u>.

Примеры. I. Неполное пространство: $(a,b)\subset R$, $\rho(x,y)=|x-y|$.

2. Полнота евклидова пространства R^1 доказывается в курсе математического анализа.

3. Полнота евклидова пространства R^n вытекает непосредственно из полноты R^1.

Доказательство. Пусть $\{x^{(p)}\}$ – фундаментальная последовательность точек из R^n. Это означает, что $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\ N=N(\varepsilon)$, такое, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right)^2<\varepsilon^2 \quad \forall\ p,q>N .$$

Следовательно, $|x_k^{(p)}-x_k^{(q)}|<\varepsilon$. Отсюда $\{x_k^{(p)}\}$ – фундаментальная последовательность.

4. Пространство ℓ_2 – полное. Пусть $\{x^{(n)}\}$ – фундаментальная последовательность. Тогда $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, такое, что

$$\rho^2(x^{(n)},x^{m})=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{m}-x_k^{n}\right)^2<\varepsilon^2 \quad \forall\ n,m>N. \quad (2)$$

Следовательно, при любом k последовательность $\{x_k^{(n)}\}$ фундаментальна и сходится к x_k. Покажем, что $x=(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k, \ldots)\in\ell_2$, т.е., что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty \quad ; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\rho(x^n,x)=0 .$$

Из (2) получаем

$$\sum_{k=1}^{M}\left(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right)^2<\varepsilon^2 .$$

Пусть $m\to\infty$. Тогда

$$\sum_{K=1}^{M} \left(x_K^{(n)} - x_K\right)^2 < \varepsilon^2 .$$

Пусть $M \to \infty$. Тогда

$$\sum_{K=1}^{\infty} \left(x_K^{n} - x_K\right)^2 \leq \varepsilon^2 .$$

Из сходимости $\sum\limits_{K=1}^{\infty} (x_K^n)^2$ и $\sum\limits_{K=1}^{\infty} (x_K^n - x_K)^2$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{K=1}^{\infty} x_K^2$ /в силу элементарного неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$/.

5. Пространство $C_2[a, b] = \{ f \in C[a, b] \mid \int\limits_a^b f^2(x)dx < \infty \}$ неполно (см. пример к определению 8).

В анализе широко используется лемма о вложенных отрезках. В метрических пространствах аналогичную роль играет следующая теорема.

Теорема (о вложенных шарах). Метрическое пространство R является полным тогда и только тогда, когда всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Задачи.

1. Пусть $\rho(x, y)$ - метрика на множестве X. Доказать, что функции

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad \rho_2(x, y) = \ln|1 + \rho(x, y)|,$$

$$\rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$$

также являются метриками. Что можно утверждать о полноте получающихся пространств, если в метрике $\rho(x, y)$ множество X было полным метрическим пространством?

2. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой:

а) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$;

в) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$.

Если нет, то какие элементы необходимо добавить, чтобы пространство стало полным?

3. Доказать, что всякое замкнутое подпространство полного метрического пространства X есть полное метрическое простран-

ство.

4. Доказать, что множество E всех непрерывных функций f на $[0, 1]$, удовлетворяющих для всех $x \in [0, 1]$ неравенствам $A < f(x) < B$, является открытым множеством в пространстве $C[0, 1]$.

5. Построить последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым

§ 3. Принцип сжимающих отображений и его применение

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении метрического пространства в себя. Одним из важнейших критериев при решении этих вопросов является принцип сжимающих отображений.

Определение 1. Пусть R – метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется сжимающим отображением, если $\exists\ \alpha < 1$, такое, что $\forall\, x, y \in R$

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\, \rho(x, y).$$

Утверждение. Всякое сжимающее отображение непрерывно. Действительно, если $x_n \to x$, то и $Ax_n \to Ax$, так как

$$\rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\, \rho(x_n, x),$$

но по условию $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 2. x – неподвижная точка отображения A, если $Ax = x$.

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R, имеет одну и только одну неподвижную точку x^*. При этом

$$\rho(x^*, x^n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \rho(x^0, Ax^0), \quad x^n = A^n x_0 .$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in R$, $x^n = A^n x^0$. Покажем, что $\{x^n\}$ – фундаментальная последовательность. Действительно,

$$\begin{aligned}\rho(x^n, x^m) &= \rho(A^n x^0, A^m x^0) \le \alpha^n \rho(x^0, x^{m-n}) \le \\ &\le \alpha^n [\rho(x^0, x^1) + \rho(x^1, x^2) + \ldots + \rho(x^{m-n-1}, x^{m-n})] \le \\ &\le \alpha^n \rho(x^0, x^1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \le \\ &\le \alpha^n \rho(x^0, x^1)\frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Значит, эта последовательность фундаментальна, и в силу полноты пространства неподвижная точка существует.

Неравенство

$$\rho(x^*, x^n) \le \rho(x^n, x^{n+1}) + \rho(x^{n+1}, x^{n+2}) + \ldots + \rho(x^{m-1}, x^m) + \rho(x^m, x^*) \le \alpha^n \rho(x^0, Ax^0) + \alpha^{n+1}\rho(x^0, Ax^0) + \ldots \le \alpha^n \rho(x^0, Ax^0)\frac{1}{1-\alpha}$$

дает оценку скорости сходимости итераций.

Докажем единственность неподвижной точки. Если $Ax = x$ и $Ay = y$, то $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x,y)$, $\alpha<1$, откуда $x = y$.

Пример I. Рассмотрим отображение n-мерного пространства в себя, задаваемое системой равенств:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Если A есть сжатие, т.е. сжимающее отображение, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$.

При каких условиях отображение будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве.

Рассмотрим три варианта:

а) Пространство R^n_∞, т.е. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$,

$$\rho(\vec{y}', \vec{y}'') \le \max_{1\le i\le n}|y_i' - y_i''| = \max_{1\le i\le n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'')\Big| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot|x_j' - x_j''| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot\max_{1\le j\le n}|x_j' - x_j''| =$$

$$= \Big(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big)\rho(\vec{x}', \vec{x}'').$$

Отсюда вытекает достаточное условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \le \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

т.е. сумма модулей элементов в любом столбце не превосходит единицы.

б) Пространство R^n_1, т.е. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$,

$$\rho(\vec{y}', \vec{y}'') = \sum_{i=1}^{n}|y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'')\Big| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j' - x_j''| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j' - x_j''| \leq$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(\vec{x}', \vec{x}'') .$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \, , \; j = 1, \ldots, n \, ,$$

т.е. сумма модулей элементов в любой строке не превосходит единицы.

в) Пространство R^n, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

На основании неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\rho^2(\vec{x}', \vec{x}'') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j' - x_j'') \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{k=1}^{n} (x_k' - x_k'')^2 \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(\vec{x}', \vec{x}'') .$$

Отсюда вытекает условие сжимаемости

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leq \alpha < 1 .$$

Каждое из условий, перечисленных в пп. "а", "б", "в", достаточно для того, чтобы отображение было сжатием.

Ни одно из условий не является необходимым, чтобы применить метод последовательных приближений.

Пример 2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \lambda \int_0^t x(\tau)\, d\tau + 1 .$$

Докажем, что при $|\lambda| < 1$ оператор является сжимающим в $C[0,1]$:

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t \in [0,1]} \left| \lambda \int_0^t (x(\tau) - y(\tau))\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| \max_{t \in [0,1]} \left(\max_{\tau \in [0,t]} |x(\tau) - y(\tau)| \right) t \leq$$

$$\leq |\lambda| \, \rho(x, y) \max_{t \in [0,1]} |t| = |\lambda| \, \rho(x, y) .$$

Следовательно, при $|\lambda|<1$ оператор является сжимающим. Найдем решение интегрального уравнения $x(t)=\lambda\int_0^t x(\tau)d\tau+1$, т.е. неподвижную точку этого оператора при $\lambda=\frac{1}{2}$, последовательными итерациями:

$$x^0=1;$$

$$x^1=(Ax^0)(t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau+1=\frac{t}{2}+1;$$

$$x^2=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{\tau}{2}+1\right)d\tau+1=1+\frac{1}{2}t+\frac{t^2}{8};$$

. . . .

$$x^n=1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2!}\,\frac{t^2}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n!}\,\frac{t^n}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{t/2}.$$

Следовательно, $x(t)=e^{t/2}$.

Задачи.

I. Преобразовать следующие системы линейных алгебраических уравнений так, чтобы их можно было решать итерационным методом:

а) $\begin{cases}2x+y=2\\ x-3y=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x+y=4\\ x+2y=3\end{cases}$.

Исследовать характер приближения итераций к точному решению.

2. Доказать, что следующие уравнения (или системы уравнений) имеют единственные решения в указанных пространствах:

а) $$x_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos x_m}{m^2+n^2+16}=1,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$x=(x_1,x_2,\ldots)\in\ell_\infty.$$

б) $$f(x)+\int_0^1\frac{f(y)}{x+y+2}\,dy=x,\quad f\in C[0,1].$$

в) $$f(x)+\int_0^1\frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4}\,dy=1,\quad f\in C[0,1].$$

г) $$x_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{(m+n)^2+10}=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\ldots,$$

$$x=(x_1,x_2,\ldots)\in\ell_1.$$

д) $$\begin{cases}x+\frac{1}{4}(\cos 2x-\sin y)=\frac{1}{4}\\ y-\frac{1}{5}(\sin 3x+\cos y)=\frac{1}{2}\end{cases};\ (x,y)\in R^2.$$

3. Пусть функция $x = f(t)$ задана и дифференцируема на $[a, b]$ и отображает этот отрезок в себя, причем

$$\max_{[a,b]} |f'(t)| < 1 .$$

Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет на $[a, b]$ единственное решение.

4. Рассмотрим уравнение $2te^t = 1$.

а) Доказать, что это уравнение имеет единственное решение и что это решение лежит на интервале (0, 1).

б) Привести уравнение к виду, пригодному для составления итераций, и определить число итераций, необходимых для того, чтобы приближенное решение отличалось от точного не более чем на 0,01, если в качестве начального приближения принято $t_0 = 0$.

5. Рассмотрим уравнение $t^7 + t + 1 = 0$.

а) Доказать, что это уравнение имеет единственный вещественный корень, и найти отрезок, на котором он лежит.

б) Привести уравнение к виду, удобному для решения итерационным методом.

в) Найти число итераций, необходимых для определения корня с погрешностью, не превышающей 0,01.

§ 4. Топологические пространства

Можно, не вводя в данном множестве X метрику, непосредственно определить в X систему открытых множеств с помощью аксиом. Этот путь приводит нас к понятию топологического пространства.

Определение 1. Пусть X – некоторое множество (пространство-носитель). Топологией в X называется любая система τ его подмножеств G, удовлетворяющая двум требованиям:

1. $X, \varnothing \in \tau$.

2. Объединение $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) набора множеств G_α из τ и пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ.

Пара $T = (X, \tau)$ называется топологическим пространством, а множества G из τ – открытыми множествами.

Множества $(X \setminus G)$, дополнительные к открытым, называются замкнутыми.

Примеры. 1. Любое метрическое пространство. Система открытых множеств удовлетворяет аксиомам 1-2.

2. Множество $X=\{a,b\}$; множества $\{G\}=\{X,\emptyset,b\}$ - открытые, множества $\{\bar{G}\}=\{\emptyset,X,a\}$ - замкнутые.

Сравнение топологий. Пусть на одном и том же носителе заданы две топологии τ_1 и τ_2 (тем самым определены два топологических пространства $T_1=(X,\tau_1)$ и $T_2=(X,\tau_2)$. Скажем, что топология τ_1 сильнее (или тоньше) топологии τ_2, если система множеств τ_2 содержится в τ_1. Говорят также, что τ_2 слабее, или грубее, чем τ_1.

Определение 2. Совокупность $\mathcal{Y}$ открытых подмножеств называется базой топологии пространства T, если всякое открытое множество в T может быть представлено как сумма некоторого числа (конечного или бесконечного) множеств из $\mathcal{Y}$.

Пример. Совокупность всех открытых шаров (с произвольным центром и радиусом) образует базу в метрическом пространстве.

§ 5. Компактность в метрических пространствах

Определение I. Множество $K\subseteq M$ называется компактным, если любое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. Множество K покрыто открытыми множествами, если K содержится в объединении этих множеств.

Определение 2. Множество $K\subseteq M$ называется предкомпактным, если его замыкание компактно.

Определение 3. Множество $K\subseteq M$ называется предкомпактным, если любая его бесконечная часть содержит фундаментальную последовательность.

Определения 2 и 3 равносильны.

Определение 4. Множество $B\subseteq M$ называется ε-сетью для множества K, если для всякой точки $x\in K$ найдется точка $y\in B$, такая, что $\rho(x,y)\leqslant\varepsilon$.

Теорема I (критерий Хаусдорфа). Множество $K\subseteq M$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon>0$ у него существует конечная ε-сеть.

Примеры. I. В R^n понятие предкомпактности совпадает с обычной ограниченностью. В этом случае данное множество можно заключить в достаточно большой куб, куб разбить на кубики с ребром ε. Вершины кубиков будут образовывать конечную $\frac{\sqrt{n}}{2}\varepsilon$-сеть в исходном кубе, а следовательно, и в любом подмножестве куба.

2. Единичная сфера S в ℓ_2 – пример ограниченного, но не компактного множества. Рассмотрим бесконечный набор точек из S:

$$e_1 = (I, 0, \ldots, 0, \ldots);$$
$$e_2 = (0, I, 0, \ldots\ldots\ldots);$$
$$e_3 = (0, 0, I, 0, \ldots\ldots);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Очевидно, что $\rho(e_i, e_j) = \delta_{ij}\sqrt{2}$. Поэтому в S не может быть конечной ε-сетки.

3. Множество $\Pi \subset \ell_2$, $\Pi = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) \mid |x_1| \le 1;$

$$|x_2| \le \frac{1}{2}; \ldots; |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}; \ldots \}$$

– гильбертов кирпич (пример бесконечномерного компактного множества).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждой точке

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \Pi$$

сопоставим

$$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \Pi^* \subset \Pi,$$

$$\rho(x, x') = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k} \Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Легко заметить, что Π^* конечномерно и ограничено, следовательно, Π^* предкомпактно. Выберем в Π^* конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. Она будет ε-сетью для всего Π.

С помощью критерия Хаусдорфа выводятся критерии компактности для тех или иных конкретных метрических пространств.

Теорема 2 (критерий компактности в $C[a,b]$, или теорема Арцела). Множество $K \subset C[a,b]$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно:

I) ограничено, т.е. $\exists\, c > 0$, такое, что

$$|f(x)| < c \quad \forall x \in [a,b], \ f \in K;$$

2) равностепенно непрерывно: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что для всех пар точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, разность

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in K.$$

Примеры компактных множеств в $C[a,b]$.

I. Пусть M – равномерно ограниченное множество функций в пространстве $C[a;b]$, т.е. существует $K>0$: $|f(x)|\le K$ для всех $f\in M$, $x\in[a,b]$. Тогда множество N функций вида $y(t)=\int\limits_a^t x(\tau)d\tau$, где $x(t)\in M$, компактно.

Проверим выполнение условий теоремы:

I) $$|y(t)|=\left|\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau\right|\le\max_{[a,b]}|x(\tau)|\int\limits_a^t d\tau\le$$
$$\le(b-a)\max_{[a,b]}|x(\tau)|\le K(b-a);$$

2) $$|y(t_1)-y(t_2)|=\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}x(\tau)\,d\tau\right|\le$$
$$\le\max_{[a,b]}|x(\tau)|\cdot|t_1-t_2|\le K|t_1-t_2|.$$

и можно взять $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/K$.

2. Множество

$$A=\left\{f\in C[0,1]\;\middle|\;f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{1}{x^2+n},\ |b_n|\le\frac{1}{n},\ n\in N\right\}.$$

Проверим выполнение условий теоремы:

I) $$|f(x)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\frac{1}{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty;$$

2) $$|f(x_1)-f(x_2)|\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{|x_1-x_2|\,(x_1+x_2)}{(x_1^2+n)(x_2^2+n)}\le$$
$$\le 2|x_1-x_2|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n^2}\le C|x_1-x_2|.$$

Теорема 3 (критерий компактности в ℓ_p). Множество M элементов $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell_p$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно:

I) ограничено;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p$ существует равномерно относительно $x\in M$,

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$, такое, что $\forall n>N,\ \forall x\in M$ выполнено

$$\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^p<\varepsilon.$$

Задачи

I. Доказать, что в $C[0,1]$ множество многочленов степени не выше n, для которых $|P(x)|\le K$, является компактным множеством.

2. Будет ли компактным множеством в пространстве $C[a, b]$ множество всех степеней x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. При каких условиях на последовательность $\{a_k\}$ множество элементов $x \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x_k}{a_k} \right|^2 < 1$ будет компактным.

4. Компакты ли следующие множества в пространстве $C[0, 1]$:

а) $x_n(t) = t^n$, $n \in N$;

б) $x_n(t) = \sin nt$, $n \in N$;

в) $x_n(t) = \sin(t + n)$, $n \in N$;

г) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in [1, 2]$;

д) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in R$;

е) $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t$, $\alpha \in R$;

ж) $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in R$, $\alpha \geqslant 0$.

5. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$, таких, что

$$|x(a)| \le K_1, \quad \int_a^b |x'(t)|\, dt \le K_2$$

(постоянная $K_1 \geqslant 0$, постоянная $K_2 \geqslant 0$), компактно в пространстве $C[a, b]$. Указание:

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\, dt \right| \le \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot |x'(t)|\, dt \le$$
$$\le \sqrt{|t_1 - t_2|} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |x'(t)|^2\, dt}\,.$$

6. Проверить выполнение аксиомы треугольника в следующих метрических пространствах:

а) ℓ_p; б) ℓ_∞; в) $C[a, b]$; г) $L_p[a, b]$.

7. Доказать компактность следующих множеств:

I) Множества функций $f \in C[0, 1]$, представимых в виде:

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin nx}{n^2 + x^2}$, $|b_n| < \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$;

б) $f(x) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(y)}{x^2+y^2+1}\,dy$, $|\varphi(y)|<1$, $y\in[0,1]$.

2) Множества векторов $x=(x_1, x_2, \ldots)\in \ell_1$, удовлетворяющих условиям:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,|x_n| < 1$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < 1$.

Указание. В задаче "б" воспользоваться неравенством Коши - Буняковского.

3) Множества векторов $x=(x_1, x_2, \ldots)\in \ell_1$, представимых в виде:

а) $x_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2+n^2+1}$, $n=1,2,\ldots$, $|a_m|<\frac{1}{m^2}$;

б) $x_n = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(y)}{n^2+y^2}\,dy$, $n=1,2,\ldots$, $\varphi\in C[0,1]$,

$|\varphi(y)|<1$, $y\in[0,1]$.

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 6. Линейные пространства

Определение I. Непустое множество L элементов x, y называется линейным, или векторным пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:

I.

1. $x+y=y+x$ (коммутативность);
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность);
3. В L существует такой элемент 0, что $x+0=x$ для всякого $x\in L$;
4. Для всякого $x\in L$ существует $-x$, такой, что $x+(-x)=0$ (существование противоположного элемента).

II. $\forall \alpha\in R$ и $\forall x\in L$ определено $\alpha x\in L$, причем:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
2. $1\cdot x = x$;

3. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

4. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

Примеры. R^n; $C[a,b]$; ℓ_p; L_p.

1. Линейная зависимость.

Определение 2. Элементы $x_1, \ldots, x_k$ линейного пространства называются линейно зависимыми, если $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (не все равны нулю) такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0.$$

В противном случае $x_1, \ldots, x_k$ – линейно независимые. Бесконечная система элементов $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ называется линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема.

Определение 3. Подмножество $L' \subset L$ называется подпространством, если оно само образует линейное пространство.

Примеры. 1. Многочлены в $C[a,b]$ образуют подпространство.

2. Элементы вида αx^0, $x^0 \in L$, $\alpha \in R$.

2. Линейные функционалы.

Определение 4. Числовая функция f, определенная на некотором линейном пространстве L, называется функционалом.

Функционал называется линейным, если $\forall\, x, y \in X$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in R, \ x \in X.$$

Примеры линейных функционалов:

1. $f(\bar{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, $\bar{x} \in R^n$.

2. $I(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$, $x(t) \in C[a,b]$.

3. $F(x) = \int\limits_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt$, $y_0(t) \in C[a,b]$; $x(t) \in C[a,b]$.

4. $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$, $x(t) \in C[a,b]$, где $t_0 \in [a,b]$.

Обычно последний функционал записывается в форме

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt,$$

где функция $\delta(t)$ характеризуется свойствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ \infty, & t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1;$$

функцию $\delta(t)$ называют δ-функцией Дирака.

3. Геометрический смысл линейного функционала. Обозначим $Ker\, f = \{x \in L : f(x) = 0\} = L'$ – подпространство нулей или ядро функционала f. Пусть $x_1, x_2 \in L'$. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = 0.$$

Следовательно, это подпространство.

Подпространство $Ker\, f$ имеет коразмерность I. Действительно, возьмем какой-либо элемент $x_0 \notin Ker\, f$, т.е. $f(x_0) \neq 0$. Будем считать, что $f(x_0) = 1$ (так как в противном случае x_0 заменим на $\frac{x_0}{f(x_0)}$).

Пусть $\forall x \in L \;\; y = x - f(x)x_0$. Тогда $f(y) = 0$, отсюда $y \in Ker\, f$.

Представление элемента x в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in Ker\, f$, единственно. Докажем это. Пусть $x = \alpha x_0 + y$ и $x = \alpha' x_0 + y'$, $y, y' \in Ker\, f$. Тогда $(\alpha - \alpha')x_0 = y' - y$. Если $\alpha \neq \alpha'$, то $x_0 = \frac{y' - y}{\alpha - \alpha'} \in Ker\, f$. Получаем противоречие с выбором x_0.

Для всякого подпространства L' коразмерности I можно указать такой функционал f, что $Ker\, f = L'$. Достаточно выбрать произвольный элемент $x_0 \notin L'$ и представить каждый элемент $x \in L$ в виде $x = \alpha x_0 + y$. Такое представление единственно. Положив $f(x) = \alpha$, мы получим линейный функционал f, для которого $Ker\, f = L'$.

Если f – нетривиальный линейный функционал на пространстве L, то множество $M_f = \{x : f(x) = 1\}$ является гиперплоскостью, параллельной подпространству $Ker\, f$ (действительно, фиксируя какой-нибудь элемент x_0, для которого $f(x_0) = 1$, мы можем всякий вектор $x \in M_f$ представить в виде $x = x_0 + y$, где $y \in Ker\, f$). С другой стороны, если M' – какая-нибудь гиперплоскость, параллельная подпространству L' (коразмерности I) и не проходящая через начало координат, то существует единственный линейный функционал f, такой, что $M' = \{x : f(x) = 1\}$: если $M' = L' + x_0$, $x_0 \in L$, то $\forall x \in L \;\; x = \alpha x_0 + y$, $y \in L'$ $(L' \parallel M')$.

Полагая, как и выше, $f(x) = \alpha$, мы получим искомый линейный функционал.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными линейными функционалами, определенными на L, и всеми гиперплоскостями в L, не проходящими через начало координат.

§ 7. Нормированные пространства. Определения и примеры

Определение I. Линейное пространство L называется нормированным пространством, если каждому $x \in L$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x) так, что выполнены следующие три аксиомы:

I) $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (условие невырожденности нормы);

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (условие однородности нормы);

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Всякое нормированное пространство становится метрическим, если ввести в нем расстояние $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Примеры нормированных пространств:

I. R^n, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$.

2. $C[a, b]$, $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$, $x(t) \in C[a, b]$.

3. ℓ_p, $p > 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$, $x \in \ell_p$.

4. L_p, $p > 1$, $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $x \in L_p[a, b]$.

Определение 2. Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

В нормированном подпространстве основной интерес представляют замкнутые линейные подпространства, т.е. подпространства, содержащие все свои предельные точки. В конечномерном нормированном пространстве всякое подпространство автоматически замкнуто. В бесконечномерном это не так. Например, в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций многочлены образуют подпространство, но оно не замкнуто: в силу теоремы Вейерштрасса, гласящей, что всякая непрерывная функция на отрезке есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов, замыкание подпространства многочленов в $C[a,b]$ есть все $C[a,b]$.

Далее мы будем называть подпространством нормированного пространства только замкнутое подпространство. Совокупность элементов (не обязательно замкнутую), содержащую вместе с x и y их произвольную линейную комбинацию $\alpha x+\beta y$, будем называть линейным многообразием.

§ 8. Евклидовы и гильбертовы пространства

I. Евклидовы пространства.

Определение I. Вещественное линейное пространство E называется евклидовым, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое (x,y) и называемое скалярным произведением, и выполнены следующие аксиомы:

I) $(x,x)\geqslant 0$, причем $(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

2) $(x,y)=(y,x)$;

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

Всякое евклидово пространство можно превратить в нормированное пространство, определив в нем норму по формуле

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

Выполнение аксиомы 3 (неравенства треугольника) вытекает из неравенства Коши – Буняковского: $|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$, которое мы сейчас докажем. Рассмотрим

$$\varphi(\lambda)=(\lambda x+y,\lambda x+y)=\lambda^2(x,x)+2\lambda(x,y)+(y,y)=$$
$$=\|x\|^2\lambda^2+2(x,y)\lambda+\|y\|^2.$$

Так как $\varphi(\lambda)\geqslant 0$, дискриминант

$$D=4(x,y)^2-4\|x\|^2\|y\|^2\leqslant 0.$$

Отсюда получаем неравенство Коши – Буняковского.

Имеющееся скалярное произведение позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т.е. длину вектора), но и угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\ \|y\|} .$$

Примеры. I. Евклидово пространство R^n,

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ , \ x, y \in R^n .$$

2. Пространство ℓ_2,

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \ , \ x, y \in \ell_2 .$$

3. Пространство

$$L_2[a, b] = \{x(t) \mid \int_a^b x^2(t)\,dt < \infty\} ,$$

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt , \ x(t), y(t) \in L_2[a, b] .$$

Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ из евклидова пространства E называется ортогональной, если

$$(x_\alpha , x_\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta .$$

Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ полна (т.е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все E), то она называется ортогональным базисом. Если $\|x_\alpha\| = 1$ для всех x, то базис называется ортонормированным.

2. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Равенство Парсеваля. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ – ортогональная нормированная система в евклидовом пространстве E и f – произвольный элемент из E. Сопоставим элементу $f \in E$ последовательность чисел $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, которые называются координатами, или коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$. Ряд

$$\sum_k c_k \varphi_k \tag{3}$$

назовем рядом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_n\}$. Выясним, совпадает ли сумма ряда (3) с исходным элементом f.

Рассмотрим предварительно следующую задачу: при заданном n подобрать коэффициенты α_k ($k = 1, 2, \ldots$) так, чтобы расстояние между f и суммой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

было минимальным.

Рассмотрим выражение

$$\| f - S_n \|^2 = \Big(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k ,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \Big) =$$

$$= (f, f) - 2 \Big(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \Big) =$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 .$$

Минимум этого выражения достигается тогда, когда последнее слагаемое равно нулю, т.е. при $\alpha_k = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В этом случае

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 . \qquad (4)$$

Геометрически это обобщение теоремы о том, что длина перпендикуляра , опущенного из точки на плоскость, меньше, чем длина любой наклонной, проведенной из этой точки.

Из (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \| f \|^2 .$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Определение 2. Ортогональная нормированная система $\{ \varphi_k \}_{k=1}^{\infty}$ называется <u>замкнутой</u>, если для любого $f \in E$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2 ,$$

называемое равенством Парсеваля.

Теорема I. В сепарабельном евклидовом пространстве всякая полная ортонормированная система является замкнутой, и обратно.

Теорема 2 (Рисса - Фишера). Пусть $\{ \varphi_n \}$ - произвольная ортогональная нормированная система в полном евклидовом пространстве E , и пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится. Тогда существует такой элемент $f \in E$, что

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \| f \|^2 .$$

3. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме .

Определение I. Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется <u>гильбертовым</u> пространством.

Теорема I. Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.

Доказательство. Покажем, что каждое гильбертово пространство H изоморфно пространству ℓ_2. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ его коэффициентов Фурье по этой системе. Так как $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, последовательность $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots) \in \ell_2$.

Обратно, в силу теоремы Рисса – Фишера, каждому элементу $c = (c_1, c_2, \ldots)$ отвечает некоторый элемент $f \in H$. Покажем, что если

$$f \longleftrightarrow (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots);$$

$$g \longleftrightarrow (g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots),$$

то

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n. \tag{5}$$

Действительно,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2,$$

$$(f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2.$$

Отсюда получаем (5).

Задачи.

1. Сходится ли в пространстве $C[0, 1]$ последовательность:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

б) $y_n(t) = t^n - t^{2n}$?

2. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = t^{n+1}/(n+1) - t^{n+2}/(n+2)$$

в пространстве:

а) $C[0, 1]$; б) $C^1[0, 1]$.

3. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$:

а) открытым; б) замкнутым ?

4. Будет ли замкнутым в пространстве $C[a,b]$ множество многочленов степени:

а) $\leq K$; б) $= K$?

5. Доказать, что в пространстве $C[a,b]$ множество функций $x(t)$, таких, что для любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.

6. Множество $A \subset X$ называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки A, целиком лежит в A. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество:

а) многочленов степени $n = K$;

б) многочленов степени $n \leq K$;

в) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|\,dt \leq 1;$$

г) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|^2\,dt \leq 1 \ ?$$

7. В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства:

$$L = \left\{ x(t) \in L_2[0,1] : \int_0^1 x(t)\,dt = 0 \right\}.$$

8. В пространстве $L_2[0,1]$ найти проекцию элемента $x(t) = t^3$ на подпространство многочленов степени $m \leq n$, если $n = 0, 1, 2$.

Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 9. Линейные функционалы на нормированных пространствах

Определение 1. Всякая функция f, определенная на линейном нормированном пространстве, называется функционалом. Функционал называется линейным, если $\forall \alpha, \beta \in R$, $x, y \in L$,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Определение 2. Линейный функционал называется ограниченным, если $\exists c \in R$ такое, что

$$|f(x)| \leq c\,\|x\|. \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что значения ограниченного функционала f на единичном шаре по модулю не превосходят в силу (6) той же константы c. Очевидно, справедливо и обратное: если для линейного функционала f верно неравенство

$$|f(x)| \leq C \tag{6'}$$

для всех x из единичного шара в L, то функционал f ограничен.

Напомним, что функционал f, определенный на пространстве L, называется <u>непрерывным</u>, если для всякого $x_0 \in L$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_{x_0} > 0$, такое, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon ,$$

как только $\|x - x_0\| < \delta_{x_0}$.

Теорема I. В нормированном пространстве линейный функционал f непрерывен в том и только в том случае, когда он ограничен.

Доказательство. Покажем сначала, что если линейный функционал f непрерывен в какой-либо одной точке $x \in L$, то он непрерывен и всюду на L. Пусть y – произвольная точка в L и $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ при $z \in U_\delta(x)$ (δ – окрестность точки x). Тогда сдвиг этой окрестности

$$V_\delta(y) = U_\delta(x) + (y - x)$$

будет искомой окрестностью точки y, так как

$$|f(y) - f(z + y - x)| = |f(y) - f(z) - f(y) + f(x)| =$$
$$= |f(x) - f(z)| < \varepsilon .$$

Следовательно, проверять непрерывность функционала достаточно в одной точке, например в точке 0.

Если функционал f непрерывен в точке $x = 0$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность нуля $U_{\delta_0}(0)$, что

$$|f(x)| < \varepsilon , \tag{7}$$

если $x \in U_{\delta_0}(0)$. Если $\|y\| \leq 1$, то из (7)

$$|f(y)| = \left| f(\delta_0 y) \frac{1}{\delta_0} \right| \leq \frac{1}{\delta_0} \varepsilon = C ,$$

т.е. получили ограниченность функционала на единичном шаре. Предположим теперь, что

$$|f(x)| \leq C \quad , \text{ если } \|x\| \leq 1 .$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, тогда при $y \in U_{\varepsilon/C}(0)$

$$|f(y)| = \left| f\left(y \frac{C}{\varepsilon}\right) \right| \frac{\varepsilon}{C} \leq C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon .$$

Получили непрерывность линейного функционала в нуле.

Определение 3. Нормой линейного функционала f ($\| f \|$) называется точная верхняя грань значений $| f(x) |$ на единичном шаре пространства L, т.е.

$$\| f \| = \sup_{\| x \| \le 1} | f(x) | . \tag{8}$$

Таким образом, $\| f \|$ служит наименьшей возможной константой в соотношениях (6) и (6').

Норму функционала можно определить следующим образом:

$$\| f \| = \sup_{x \ne 0} \frac{| f(x) |}{\| x \|} . \tag{9}$$

Равносильность определений (8) и (9) следует из того, что $\forall x \ne 0$:

$$\frac{| f(x) |}{\| x \|} = \left| f\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right| .$$

Из (9) вытекает, что

$$| f(x) | \le \| f \| \, \| x \| \quad \text{при} \quad x \in L .$$

Примеры. I. Пространство $L = R^n$,

$$f(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}) , \quad \vec{x}, \vec{a} \in R^n ,$$

$\vec{a}$ – фиксированный вектор. Из неравенства Коши – Буняковского получаем

$$| f(\vec{x}) | = | (\vec{x}, \vec{a}) | \le \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{a} \| .$$

Следовательно,

$$| f(\vec{x}) | / \| \vec{x} \| \le \| \vec{a} \| .$$

Отсюда

$$\| f \| = \sup_{\vec{x} \ne 0} \frac{| f(\vec{x}) |}{\| \vec{x} \|} \le \| \vec{a} \| .$$

Так как

$$| f(\vec{a}) | = | (\vec{a}, \vec{a}) | = \| \vec{a} \|^2 , \quad \text{значит} \quad \| f \| = \| \vec{a} \| .$$

2. Пространство

$$L = L_2[a, b] = \left\{ x(t) \,\Big|\, \int_a^b x^2(t)\, dt < \infty \right\} ,$$

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt .$$

Упражнение I. Показать, что $\|f\| = \left(\int_a^b y^2(t)\,dt \right)^{1/2}$. Указание. Надо воспользоваться неравенством Коши – Буняковского ($L_2[a,b]$ – евклидово пространство).

Задачи. I. Найти нормы следующих функционалов:

а) $f(x) = 2(x(1) - x(0))$, $x \in C[-1,1]$;

б) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)$, $x \in C[-1,1]$;

в) $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$, $x \in C[-1,1]$;

г) $f(x) = \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt$, $x \in C[-1,1]$;

д) $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt$, $x \in C[-1,1]$.

2. Найти нормы функционалов:

а) $f(x) = \int_{0}^{1} x(t)\,dt$, $x \in C^1[-1,1]$,

$$\|x\| = \max_{[-1,1]} |x(t)| + \max_{[-1,1]} |x'(t)|;$$

б) $f(x) = \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt$, $x \in L_1[-1,1]$;

в) $f(x) = \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt$, $x \in L_2[-1,1]$;

г) $f(x) = \int_{0}^{1} t^{-1/3} x(t)\,dt$, $x \in L_2[0,1]$;

д) $f(x) = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$.

е) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x_n$, $x \in \ell_2$.

3. Найти нормы функционалов:

а) $F(f) = \int_{0}^{1} f(x)(2x-1)\,dx$, $f \in C[0,1]$;

б) $F(f) = \int_{0}^{1} x f(x)\,dx - f(0)$, $f \in C[0,1]$.

§ 10. Теорема Хана – Банаха

Сформулируем одну из центральных теорем в функциональном анализе.

Теорема (Хана – Банаха). Пусть $f(x)$ – линейный ограниченный функционал, определенный на линейном подпространстве L нормированного пространства X. Тогда существует всюду определенный в X линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$, такой, что $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ и $\tilde{f}(y) = f(y)$ при $y \in L$. (Или: всякий линейный ограниченный функционал, определенный на подпространстве L, может быть продолжен на все пространство X с сохранением нормы.)

Следствие I. Пусть X – нормированное пространство и $x_0 \in X$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f, такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$.

Доказательство. Пусть $L = \{t x_0 \mid t \in R\}$ – одномерное подпространство. Положим по определению $f(t x_0) = t\|x_0\|$. Тогда, если $y = t x_0$,

$$f(y) = t\left\|\frac{y}{t}\right\| = \|y\| \, sign(t).$$

Следовательно,

$$\|f\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|y\| = 1.$$

Далее по теореме Хана – Банаха продолжаем функционал f на X с сохранением нормы.

Следствие 2. Пусть L – подпространство X, $x_0 \notin L$. И пусть расстояние от x_0 до L равно d ($d = \inf\limits_{y \in L} \|x_0 - y\|$). Тогда существует линейный ограниченный функционал f, такой, что:

I) $f(y) = 0$, $y \in L$;

2) $f(x_0) = 1$;

3) $\|f\| = 1/d$.

Доказательство. Определим функционал f на $L_1 = \{y + t x_0 \mid y \in L,\ t \in R\}$,

$$f(x) = f(y + t x_0) = t.$$

Тогда $f(y) = 0$ ($y \in L$), $f(x_0) = 1$. Для проверки третьего условия заметим, что

$$|f(x)| = |t| = \frac{|t| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|} \leq \frac{\|y\|}{d} ,$$

так как $\left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| = \left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right) \right\| \geq d$, ибо $-\frac{x}{t} \in L$. Следовательно, $\|f\| \leq 1/d$.

Для доказательства неравенства $\|f\| \geq 1/d$ воспользуемся определением нижнего предела ($\inf$) и найдем такую $\{x_n\}$, что $x_n \in L$, $d = \lim\limits_{n \to \infty} \|x_0 - x_n\|$. Имеем

$$1 = f(x_0 - x_n) \leq \|f\| \cdot \|x_0 - x_n\| .$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $1 \leq d\|f\|$. Отсюда $\|f\| = 1/d$. Осталось продолжить f с L_1 на все X.

§ II. Сопряженные пространства. Слабая топология и слабая сходимость

Для линейных функционалов определены операции сложения и умножения их на числа:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) , \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) .$$

Пространство непрерывных линейных функционалов, определенных на X, называется сопряженным и обозначается X^*. В X^* можно ввести два вида сходимости:

I) сильная сходимость (сходимость по норме X^*): $f_n, f \in X^*$,

$f_n \longrightarrow f$, $n \longrightarrow \infty$, если $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

Топология в X^*, отвечающая введенной норме, называется сильной топологией в X^*;

2) $*$ - слабая сходимость: $f_n \to f$ $*$ - слабо, если $\forall x \in X$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $n \longrightarrow \infty$. Если $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ сильно, то $f_n \longrightarrow f$ и $*$ - слабо, но не наоборот.

Пример. Последовательность

$$f_n(x) = x_n , \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 ,$$

$$* \text{-} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 , \; \|f_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_n(x)| = 1 .$$

Теорема I. Для любого нормированного пространства L сопряженное ему пространство L', снабженное нормой (сильной топологией), является банаховым пространством.

Примеры сопряженных пространств:

I. Пространство

$$(\ell_p)^* = \ell_q \,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,.$$

Пусть $x \in \ell_p$, $a \in \ell_q$. Тогда

$$a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \,.$$

По неравенству Гельдера

$$|a(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_i| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} = \|a\|_{\ell_q} \|x\|_{\ell_p} \,. \qquad (10)$$

Мы показали, что если $a \in \ell_q$, то $a(x)$ – линейный непрерывный (ограниченный) функционал. Из (10)

$$\|a\|_{(\ell_p)^*} \le \|a\|_{\ell_q} \,.$$

Пусть $x^0 = (|a_1|^{q-1}, |a_2|^{q-1}, \dots)$. Тогда

$$|a(x^0)| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q = \|a\|^q_{\ell_q} \,.$$

При этом

$$\|x^0\|_{\ell_p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/p} = \|a\|^{q/p}_{\ell_q} \,,$$

так как $p(q-1) = q$. Следовательно,

$$\|a\|_{(\ell_p)^*} = \|a\|_{\ell_q} \,.$$

Покажем теперь, что ℓ_q – пространство <u>всех</u> непрерывных линейных функционалов на ℓ_p. Если $a = (a_1, a_2, \dots) \notin \ell_q$, то

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \,.$$

Пусть

$$x^{(n)} = (|a_1|^{q-1}, \dots, |a_n|^{q-1}, 0, \dots), \quad \tilde{x}^{(n)} = \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|} \in \ell_p \,.$$

Тогда $a(\tilde{x}^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Следовательно, a – <u>неограниченный</u> линейный функционал.

2. Пространство $(L_p)^* = L_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Пример исследуется совершенно аналогично предыдущему.

3. Пространство $(R^n)^* = R^n$.

Второе сопряженное пространство – это пространство, сопряженное к пространству функционалов X^*, $(X^*)^* = X^{**}$. Заметим, что всякий элемент $x_0 \in X$ определяет некоторый линейный функционал на X^*. Положим

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0),$$

где x_0 – фиксированный элемент, $x_0 \in X$, а f пробегает X^*. Функционал линеен:

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \psi_{x_0}(f_1) + \beta \psi_{x_0}(f_2).$$

Теорема 2. Если X – банахово пространство, то X изометрично (т.е. с сохранением расстояния между любыми двумя точками) вложено в X^{**}.

Всякий такой функционал непрерывен на X^*. Если $\|f\| < \delta$, то

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\| \leq \delta \|x_0\| = \varepsilon.$$

Следовательно, функционал непрерывен.

Слабая топология и слабая сходимость. Слабая топология пространства X определяется системой окрестностей нуля:

$$O_\varepsilon(0) = \{ x : |f_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n \}. \tag{II}$$

Всякое множество в X, открытое с точки зрения слабой топологии, открыто и в исходной топологии пространства X, однако обратное, вообще говоря, неверно (множества вида (II) не обязательно образуют определяющую систему окрестностей нуля в исходной топологии).

Сходимость в X, определяемая слабой топологией, называется слабой сходимостью: $x_n \in X$, x_n слабо сходится к $x_0 \in X$, если для всякого линейного непрерывного функционала $\varphi(x)$ на X числовая последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ сходится к $\varphi(x_0)$.

§ 12. Вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах

Чтобы сформулировать следующую теорему, нам понадобятся определения.

Определение 1. Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется функцией с ограниченным изменением, если существует такая постоянная C, что каково бы ни было разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | \le C . \qquad (12)$$

Определение 2. Пусть f - функция с ограниченным изменением. Точная верхняя грань сумм (12) по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a, b]$ называется полным изменением (или полной вариацией) функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $V_a^b[f]$:

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) | .$$

Теорема 1 (Ф.Рисса). Всякий линейный непрерывный функционал F в $C[a, b]$ представим в виде

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) ,$$

где Φ - некоторая функция с ограниченным изменением. При этом

$$\| f \| = V_a^b[\Phi] .$$

Пример. Пусть

$$F(f) = \int_0^2 (2x - 1) f(x)\, dx , \quad f \in C[0, 2] .$$

Введем f_n,

$$f_n = \begin{cases} -1 , & x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1 , & x \ge \frac{1}{2} \\ (nx - \frac{n}{2} + 3) , & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что (рис. 12.1)

$$\| F \| = \lim_{n \to \infty} | F(f_n) | = \int_{-1}^{1/2} (1 - 2x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x - 1)\, dx = \frac{5}{2} .$$

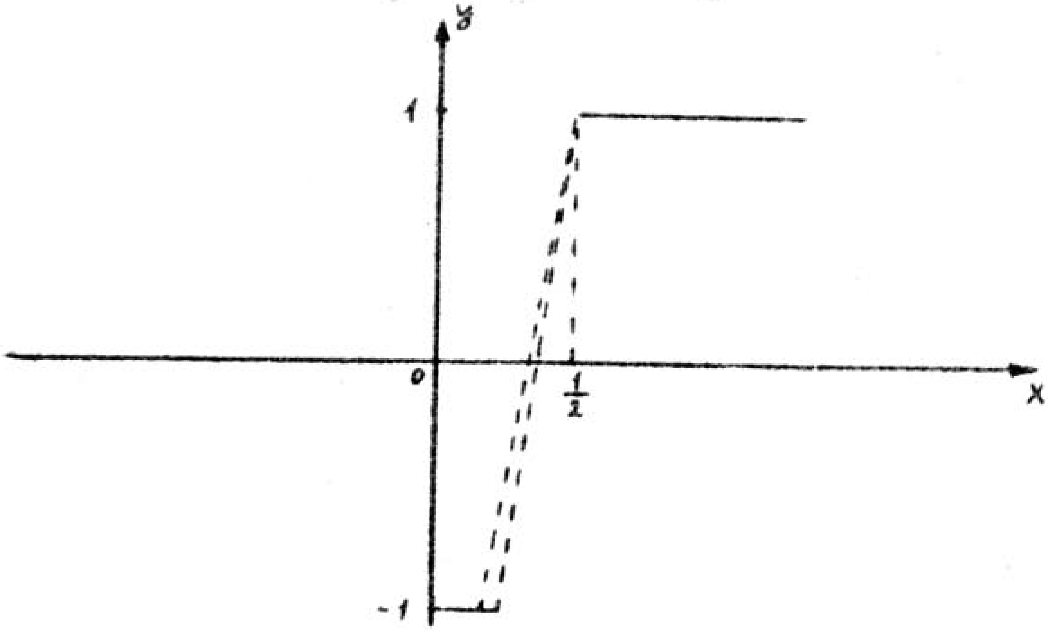


Рис. 12.1

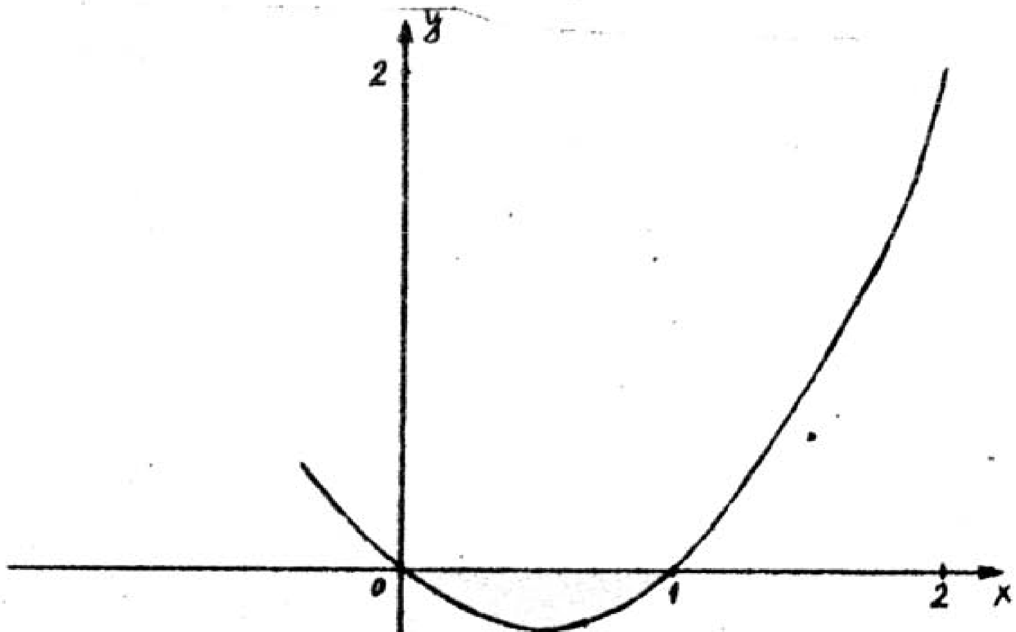


Рис. 12.2 $\Phi(x) = x^2 - x,\ V_0^2[\Phi] = \frac{5}{2}$

С другой стороны, если воспользоваться теоремой Рисса, получим (рис. I2.2)

$$\Phi = x^2 - x\,,\quad d\Phi = (2x-1)\,dx\,;$$
$$V_0^2[\Phi] = V_0^2[x^2 - x] = \frac{1}{4} + 2\,\frac{1}{4} = \frac{5}{2}\,.$$

Теорема 2 (Рисса. Об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве). Пусть H – действительное гильбертово пространство. Для всякого непрерывного линейного функционала f на H существует единственный элемент $x_0 \in H$, такой, что

$$f(x) = (x, x_0)\,,\quad x \in H\,,$$

причем $\|f\| = \|x_0\|$.

Это равенство определяет изоморфизм между H и H^*.

§ I3. Обобщенные функции

Идея построения. Пусть f – фиксированная функция на прямой, интегрируемая на каждом конечном интервале, и φ – непрерывная, обращающаяся в нуль вне некоторого конечного интервала финитная функция. Функции f можно сопоставить функционал

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx\,. \tag{I3}$$

Однако функционалами вида (I3) не исчерпываются все функционалы, которые можно ввести на таком пространстве, например, функционал $T(\varphi) = \varphi(0)$ не представим в виде (I3).

Перейдем к точным определениям. Пусть K – совокупность всех финитных функций φ, имеющих непрерывные производные всех порядков.

Определение I. Последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов из K называется сходящейся к функции $\varphi \in K$, если:

I) существует интервал, вне которого все φ_n равны нулю (интервал, вне которого функция φ равна нулю, может быть различным для различных $\varphi \in K$);

2) последовательность производных $\{\varphi_n^{(k)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$ сходится на этом интервале равномерно к $\varphi^{(k)}$ (равномерность сходимости по различным k не предполагается).

Пространство K называется основным пространством, а его элементы – основными функциями.

Определение 2. Обобщенной функцией (заданной на прямой $-\infty < x < +\infty$) называется всякий непрерывный функционал $T(\varphi)$ на основном пространстве K. При этом непрерывность понимается в том смысле, что $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$, если $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ в K.

Всякая интегрируемая на любом конечном интервале функция порождает обобщенную функцию:

$$T_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{I4}$$

Такие функции мы будем называть регулярными, не представимые в виде (I4) – сингулярными.

Примеры. I. δ -функция: $T(\varphi) = \varphi(0)$. Этот функционал часто записывают в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

при этом

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \;; \\ \infty, & x = 0 \;; \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

2. Функционал $T(\varphi) = \varphi(a)$ (смещенная δ -функция).

3. Функционал $T(\varphi) = -\varphi'(0)$,

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\left(\delta(x)\right) =$$
$$= \delta(x)\, f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta\, \varphi'(x)\, dx = -\varphi'(0).$$

Действия над обобщенными функциями. Для обобщенных функций определены операции сложения и умножения на числа. Для регулярных функций они совпадают с обычными.

Введем в пространстве обобщенных функций операцию предельного перехода.

Определение 3. Последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ сходится к f, если $\forall \varphi \in K$ выполнено:

$$(f_n, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi).$$

Обозначим через K^* пространство обобщенных функций с этой сходимостью. Если α – бесконечно дифференцируемая функция, то αf определяем с помощью равенства

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha \varphi),$$

при этом $\alpha \varphi \in K$.

Произведение двух обобщенных функций не вводим. Оно невозможно, если потребовать непрерывности операции и совпадения для регулярных обобщенных функций с обычным умножением.

Дифференцирование. Пусть

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx .$$

Тогда

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx .$$

Отсюда следует определение.

Определение 4. Производной dT/dx обобщенной функции называется функционал, определяемый формулой

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T(\varphi') .$$

Свойства обобщенных функций:

I. Всякая обобщенная функция имеет производные всех порядков.

2. Если последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ сходится к обобщенной функции f, то последовательность производных $\{f_n'\}$ сходится к производной f' предельной функции. Это верно для производных любого порядка.

Примеры. I. Функция Хевисайда

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 ; \\ 1, & x > 0 ; \end{cases}$$

$$(h,\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx , \quad (h',\varphi) = -(h,\varphi') = \varphi(0) .$$

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} .$$

Его сумма – функция с периодом $T = 2\pi$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x \le \pi ; \\ 0, & x = 0 ; \\ -\dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi \le x < 0 ; \end{cases}$$

При этом

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) .$$

С другой стороны, дифференцируя почленно этот ряд, получим расходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx .$$

Однако в смысле обобщенных функций этот ряд сходится.

Достаточность запаса основных функций. Мы определили обобщенные функции как линейные функционалы на некотором пространстве K - финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Можно основные пространства выбирать иначе. Наложив на элементы из K жесткие требования финитности и бесконечной дифференцируемости, мы получим:

I) большой запас обобщенных функций (сужение основного пространства приводит к расширению сопряженного);

2) большую свободу в применении к обобщенным функциям основных операций анализа (предельный переход, дифференцирование).

Но вместе с тем пространство K не является слишком узким. В нем достаточно элементов, чтобы различать непрерывные функции.

Теорема I. Пусть f_1 и f_2 - две различные непрерывные функции на прямой. Тогда $\exists \varphi \in K$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\varphi(x)\,dx .$$

Доказательство. Пусть $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Тогда существует $x_0 : f(x_0) \neq 0$. Следовательно, $f(x)$ сохраняет знак в интервале (α, β), $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Введем $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{(\beta - x)(x-\alpha)}\right) & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при остальных } x . \end{cases}$$

Тогда
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0 .$$

Восстановление функции по производной. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций.

Теорема 2. Только константы служат решениями (в классе обобщенных функций) уравнения $y' = 0$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$y' = f(x), \tag{I5}$$

где f - произвольная обобщенная функция.

Теорема 3. Уравнение (I5) при каждом $f \in K^*$ имеет решение, принадлежащее K^* (это первообразная обобщенной функции f).

Пример: $y' = \delta(x)$, $y(x) = h(x) + C$.

Функции нескольких переменных. Рассмотрим в n-мерном пространстве совокупность K^n функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющих частные производные всех порядков по всем аргументам, таких, что каждая из этих функций равна нулю вне некоторого параллелепипеда.

Совокупность K^n представляет собой линейное пространство, в котором сходимость можно ввести следующим образом: $\varphi_K \to \varphi$, если существует параллелепипед $a_i \le x_i \le b_i$, вне которого каждая из функций φ_K равна нулю, а в этом параллелепипеде имеет место равномерная сходимость:

$$\frac{\partial^r \varphi_K}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \longrightarrow \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r\right)$$

для каждого фиксированного набора целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Определение 5. Обобщенной функцией n переменных называется любой непрерывный линейный функционал на K^n.

§ 14. Линейные операторы. Определения и основные примеры

Определение 1. Пусть X и Y – линейные пространства. Оператор $A: X \to Y$ с областью определения $\Delta(A) \subset X$ называется линейным, если:

1) $\Delta(A)$ – линейное многообразие;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \Delta(A)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$.

Напомним, что линейным многообразием Δ называется множество векторов, такое, что если $x, y \in \Delta$, то $\alpha x + \beta y \in \Delta$ при $\alpha, \beta \in R$.

Определим ядро линейного оператора A:

$$\operatorname{Ker} A = \{ x \in X \mid Ax = 0 \}$$

и образ линейного оператора:

$$\operatorname{Im} A = \{ y \in Y \mid \exists x \in \Delta(A) : y = Ax \}.$$

Как ядро, так и образ линейного оператора являются линейными многообразиями.

Определение 2. Оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $Ax_n \to Ax_0$ при $x_n \to x_0$.

Теорема 1. Пусть A – линейный оператор, $A: X \to Y$, где X, Y –

банаховы пространства. Пусть A непрерывен в точке $0 \in X$, тогда оператор A непрерывен в любой точке $x_0 \in X$.

Доказательство. $Ax_n - Ax_0 = A(x_n - x_0)$. Если $x_n \longrightarrow x_0$, то $z_n = x_n - x_0 \to 0$. Из непрерывности оператора A в нуле следует, что $Az_n \to 0$, откуда $Ax_n - Ax_0 \to 0$, что требовалось доказать.

Примеры. I. Единичный оператор $Ix = x \quad \forall x \in X$.

2. Нулевой оператор $0x = 0 \quad \forall x \in X$.

3. Оператор $A : R^n \longrightarrow R^m$,

$$y_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \; i = 1, \ldots, m.$$

4. Пусть H - гильбертово пространство, H_1 и H_2 - его подпространства и $(h_1, h_2) = 0$ для всех $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$. В этом случае говорят, что подпространства H_1 и H_2 ортогональны. Пусть $H = H_1 \oplus H_2$ - прямая сумма подпространств H_1 и H_2, т.е. любой вектор $h \in H$ представим в виде $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Оператор ортогонального проектирования P пространства H на подпространство H_1 определяется равенством $Ph = h_1$.

5. Оператор $A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$, задаваемый равенством

$$\psi(s) = (A\varphi)(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $K(s,t)$ - фиксированная непрерывная функция двух переменных, заданная на $[a,b] \times [a,b]$.

6. Один из важнейших примеров - оператор дифференцирования D:

а) $D : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$,

$(Df)(x) = f'(x)$.

В этом примере оператор D определен не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на линейном многообразии функций, имеющих непрерывную производную. Оператор D линеен, но не непрерывен. Это видно из того, что последовательность

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

сходится к нулю в метрике $C[a,b]$, а последовательность

$$D\varphi_n(t) = \cos nt$$

расходится.

б) Оператор дифференцирования D можно рассматривать как оператор, действующий из пространства $C^1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \max_{[a,b]} |\varphi(t)| + \max_{[a,b]} |\varphi'(t)|$$

в пространство $C[a,b]$. В этом случае оператор D линеен и непрерывен и отображает все $C^1[a,b]$ на все $C[a,b]$,

$$\operatorname{Ker} D = \{\varphi \mid \varphi(x) = const\}.$$

в) Оператор $D: K^* \to K^*$; D действует из пространства обобщенных функций в пространство обобщенных функций. Оператор линеен и непрерывен (в том смысле, что из сходимости последовательности $\{f_n(t)\}$: $f(t)$ следует сходимость последовательности производных к производной обобщенной функции $f(t)$).

Пусть X - линейное нормированное пространство. Обозначим через $\overline{S}_r(0) = \{x \in X \mid \|x\| \le r\}$ замкнутый шар радиуса r с центром в ну. з.

Пусть X, Y - линейные нормированные пространства.

Определение 3. Оператор $A: X \to Y$ называется <u>ограниченным</u>, если множество $A(\overline{S}_1(0))$ ограничено в Y.

Установим теперь связь между непрерывностью и ограниченностью линейного оператора.

Теорема 2. Пусть $A: X \to Y$ - линейный оператор; X, Y - линейные нормированные пространства. Для того чтобы оператор A был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Доказательство. Необходимость. По определению непрерывности, для $\varepsilon = 1$ существует $\delta > 0$, такое, что $\|Ax\| \le 1$ при $\|x\| < \delta$, тогда для $x \in S_1(0)$ имеем

$$\|Ax\| = \|A(\tfrac{1}{\delta}\delta x)\| = \|\tfrac{1}{\delta}A(\delta x)\| = \tfrac{1}{\delta}\|A(\delta x)\| \le \tfrac{\varepsilon}{\delta} = \tfrac{1}{\delta},$$

т.е. $A(\overline{S}_1(0))$ - ограниченное множество.

Достаточность. Если $\|Ax\| \le C$ для всех $x \in \overline{S}_1(0)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}$, такое, что при $x \in \overline{S}_\delta(0)$ имеем

$$\|Ax\| = \|A(\|x\| \tfrac{x}{\|x\|})\| = \|x\| \cdot \|A(\tfrac{x}{\|x\|})\| \le \delta C = \varepsilon,$$

т.е. A непрерывен в точке 0, а следовательно, и на всем пространстве X (доказывается как в теореме I).

§ 15. Пространство линейных операторов

Пусть A, B – линейные непрерывные операторы, $A: X \to Y$, $B: X \to Y$ – линейные нормированные пространства. Положим по определению

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad (\lambda A)x = \lambda \cdot Ax .$$

Определим норму оператора A следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Отсюда, очевидно, следует

$$\|Ax\| \le \|A\| \, \|x\| .$$

Проверим выполнение аксиом нормы.

1. $\|A\| \geqslant 0$ – очевидно; пусть $\|A\| = 0$, тогда $Ax \equiv 0$, и оператор A – нулевой.

2. $\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|\lambda A x\| = |\lambda| \, \|A\|$.

3. Пусть $\|x\| \le 1$, тогда $\|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| + \|B\|$, следовательно, $\forall x \in \bar{S}_1(0)$ выполнено $\|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|$, откуда

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\| .$$

Полученное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y, принято обозначать $\mathcal{L}(X, Y)$.

Примеры. Рассмотрим оператор $A: R^n \to R^n$, задаваемый матрицей $A = (a_{ij})$, $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

1. Пространство R^n снабжено евклидовой нормой, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Используя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \Big)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \; \|x\|_2 ,$$

т.е. $$\|A\|_2 \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} .$$

2. Пространство R^n снабжено нормой $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \Big(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\Big) \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j| =$$
$$= \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_1 \Rightarrow \|A\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

3. Пространство R^n снабжено нормой $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$;

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \leq$$

$$\leq \Big(\max_j |x_j|\Big) \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty,$$

т.е. $\|A\|_\infty \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Определение I. Пусть A и B – линейные операторы, $A: X \to Y$, $B: Y \to Z$. Произведением BA называется оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in X$ элемент $z = B(Ax) \in Z$;

$$\Delta_C = \{ x \mid x \in \Delta_A,\ Ax \in \Delta_B \}.$$

Оператор C линеен и непрерывен, если A и B непрерывны.

Утверждение: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказательство: $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$.

Задачи. I. Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы:

а) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$,

б) $A: C[-1,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t)$;

в) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(0)$;

г) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$;

д) $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = x(t)$;

е) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\,d\tau$;

ж) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$.

2. $A: L_2[-\pi,\pi] \to \ell_2$, $A: x(t) \to (a_0, b_1, a_1, b_1, \ldots)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt.$$

§ 16. Обратный оператор. Обратимость

Определение I. Оператор A называется обратимым, если $\forall y \in \operatorname{Im} A$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение.

Теорема I. Оператор A^{-1}, обратный линейному оператору A, также линеен.

Доказательство: $\Delta_{A^{-1}} = \operatorname{Im} A$ – линейное многообразие. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Проверим, что

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 .$$

Пусть $Ax_1 = y_1$ и $Ax_2 = y_2$. В силу линейности A

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 . \tag{16}$$

По определению обратного оператора

$$A^{-1} y_1 = x_1, \quad A^{-1} y_2 = x_2 .$$

Поэтому

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 .$$

С другой стороны, из (16)

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

или

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 .$$

Теорема 2 (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть A – линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.

Задачи. I. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t).$$

Доказать, что A непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.

2. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds$$

непрерывно обратим, и найти A^{-1}.

§ 17. Сопряженные операторы

Пусть $A: X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, отображающий линейное топологическое пространство X в такое же пространство Y. Пусть g – линейный функционал на Y, т.е. $g \in Y^*$; $f(x) = g(Ax)$ – непрерывный линейный функционал, определенный на X, $f \in X^*$. Следовательно, каждому функционалу $g \in Y^*$ мы сопоставили функционал $f \in X^*$, т.е. получили оператор, отображающий Y^* в X^*. Этот оператор называется сопряженным к A и обозначается A^*.

Обозначим $f(x) = (f, x)$. Тогда

$(g, Ax) = (f, x)$, или $(g, Ax) = (A^* g, x)$.

Пример. Сопряженный оператор в конечномерном пространстве:

$$A: R^n \longrightarrow R^n, \quad A = (a_{ij}), \quad y = Ax;$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j.$$

Из равенства

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$$

получим, что $f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. Так как $f = A^* g$, матрица A^* сопряженного оператора равна A^T.

Свойства сопряженных операторов:

1. Оператор A^* линеен.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\lambda A)^* = \lambda A^*$.
4. Если A – непрерывный оператор из X в Y, то A^* – непрерывный оператор из Y^* в X^* (Y^* и X^* снабжены сильной топологией).

Теорема 1. Если A – ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, то $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство. В силу свойств нормы оператора имеем

$$|(A^* g, x)| = |(g, Ax)| \leq \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

откуда $\|A^*g\| \le \|A\|\cdot\|g\|;$

$$\|A^*\| \le \|A\|.$$

Пусть $x\in X$ и $Ax\ne 0$. Положим $y_0=(1/\|Ax\|)Ax\in Y$, $\|y_0\|=1$. По следствию I из теоремы Хана – Банаха существует такой функционал g, что $\|g\|=1$ и (g, y_0) = I, т.е. $(g, Ax)=\|Ax\|$.

Из соотношений

$$\|Ax\|=(g,Ax)=|(A^*g,x)|\le\|A^*g\|\cdot\|x\|\le\|A^*\|\cdot\|g\|\cdot\|x\|=$$
$$=\|A^*\|\cdot\|x\| \Rightarrow \|A\|\le\|A^*\| \Rightarrow \|A\|=\|A^*\|.$$

Теорема доказана.

§ 18. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы

Пусть $A: H\to H$ – линейный ограниченный оператор в евклидовом пространстве.

Определение I. Оператором A^*, сопряженным к оператору A, действующему в евклидовом пространстве H, называется оператор, удовлетворяющий при всех $x, y\in H$ равенству

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

При этом считаем, что A^* действует в том же пространстве, что и A.

Определение 2. Ограниченный линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве H, называется самосопряженным, если $A=A^*$, т.е. если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y\in H.$$

Определение 3. Подпространство H_1 евклидова пространства H называется инвариантным относительно A, если $AH_1\subset H_1$.

Утверждение. Если H_1 инвариантно относительно A, то $H_1^\perp$ инвариантно относительно A^*.

Доказательство. Пусть $y\in H_1^\perp$. Тогда $\forall x\in H_1$,

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = 0.$$

В частности, если A – самосопряженный оператор, то ортогональное дополнение к любому его инвариантному подпространству само инвариантно относительно A.

Задачи. I. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если:

а) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$;

б) $Ax(t) = t\,x(t)$;

в) $Ax(t) = \int_0^1 t\,x(s)\,ds$;

г) $Ax(t) = \int_0^1 t\,x(t)\,dt$.

2. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: \ell_1 \to \ell_1$, если:

а) $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$;

б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, $|\lambda_n| < 1$, $\lambda_n \in R$;

в) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$;

г) $Ax = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

3. Найти сопряженный оператор, если:

а) $A: \ell_1 \to \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \dots)$;

$$(Ax)_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m + n^2 + 1};$$

б) $A: \ell_p \to \ell_p$, $(Ax)_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{n^2 + m + 1}$;

в) $A: L_1[a,b] \to L_1[a,b]$, $a \geqslant 0$,

$$(Af)(t) = \int_a^b \frac{1}{t^2 + s + 1} f(s)\,ds;$$

г) $A: L_p[a,b] \to L_p[a,b]$,

$$(Af)(t) = \int_a^b \frac{1}{t^3 + s^5 + 1} f(s)\,ds.$$

4. Оператор A называется неотрицательным и записывается $A \geqslant 0$, если $(Ax, x) \geqslant 0$ $\forall x \in H$. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds,$$

является самосопряженным и неотрицательным.

5. Оператор $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$,

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy,$$

где функция $K(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$.
Доказать, что оператор A самосопряжен, если $K(x,y)=K(y,x)$.

§ 19. Спектр оператора. Резольвента

Вряд ли можно указать более важное понятие в теории операторов, чем понятие спектра.

Пусть A – линейный оператор в C^n. Число λ называется собственным значением оператора A, если уравнение $Ax=\lambda x$ имеет ненулевые решения.

Совокупность всех собственных значений называется спектром оператора A, а все остальные значения λ – регулярными. Иначе говоря, λ – регулярная точка, если оператор $(A-\lambda I)$ обратим. При этом $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на всем C^n и, как всякий линейный оператор в конечномерном пространстве, ограничен.

В конечномерном пространстве существует две возможности:

1) уравнение $Ax=\lambda x$ имеет ненулевое решение, т.е. λ – собственное значение для A;

2) существует ограниченный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, определенный на всем пространстве, т.е. λ – регулярная точка. Если A – оператор в бесконечномерном пространстве, то добавляется третья возможность;

3) оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ существует, т.е. уравнение $Ax=\lambda x$ имеет лишь нулевое решение, но этот оператор определен не на всем X (и, возможно, неограничен).

Определение 1. Число λ называется регулярным для оператора A, действующего в банаховом пространстве X, если оператор $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$, называемый резольвентой оператора A, определен на всем X и, следовательно, ограничен.

Совокупность всех остальных значений λ называется спектром оператора A.

Совокупность собственных значений оператора A называется точечным спектром.

Совокупность тех λ, для которых $(A-\lambda I)^{-1}$ существует, но определен не на всем X, называется непрерывным спектром.

Возможность наличия у оператора непрерывного спектра – существенное отличие операторов в бесконечномерном пространстве от операторов в конечномерном.

Теорема 1. Регулярные точки образуют открытое множество, а спектр – замкнутое.

Доказательство. Если λ - регулярная точка, то $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на всем X и ограничен. При достаточно малых δ оператор $(A-(\lambda+\delta)I)^{-1}$ тоже определен на X и ограничен:

$$(A-(\lambda+\delta)I)^{-1}=(A-\lambda I-\delta I)^{-1}=[(A-\lambda I)(I-\delta(A-\lambda I)^{-1})]^{-1}=$$
$$=[I-\delta(A-\lambda I)^{-1}]^{-1}(A-\lambda I)^{-1}=$$
$$=[I-\delta(A-\lambda I)^{-1}+\delta^2((A-\lambda I)^{-1})^2-\ldots](A-\lambda I)^{-1}.$$

При достаточно малых δ оператор существует и ограничен.

Теорема 2. Если A - ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X и $|\lambda|>\|A\|$, то λ - регулярная точка.

Доказательство:

$$A-\lambda I=-\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right),$$

отсюда

$$R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{A^K}{\lambda^K}.$$

При $\|A\|<\lambda$ этот ряд сходится и задает определенный на всем X ограниченный оператор, поэтому спектр оператора A содержится в круге радиуса $\|A\|$ с центром в нуле.

Примеры. I. Пусть $X=C[a,b]$. Тогда

$$(Ax)(t)=t\,x(t);$$
$$(A-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)=g(t),$$
$$((A-\lambda I)^{-1}g)(t)=\frac{1}{t-\lambda}g(t). \qquad (I7)$$

Следовательно, $\sigma=[a,b]$ - непрерывный спектр.

Если $\lambda\in[a,b]$, то (I7) определен не на всем $[a,b]$ и неограничен.

2. Пусть $A:\ell_2\to\ell_2$; $A:(x_1,x_2,\ldots)\to(0,x_1,x_2,\ldots)$. Этот оператор не имеет собственных значений. Оператор A^{-1} ограничен, но определен в ℓ_2 лишь на подпространстве $x_1=0$. Следовательно, $\lambda=0$ - точка спектра.

3. Оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$,

$$(Af)(x)=x\,f(x)+\alpha f(0),\quad f\in C[0,1].$$

Отсюда

$$(A-\lambda I)f(x)=(x-\lambda)f(x)+\alpha f(0)=g(x),$$
$$f(x)=\frac{g(x)-\alpha f(0)}{x-\lambda},$$

$$f(0) = \frac{g(0) - \alpha f(0)}{-\lambda},$$

$$-\lambda f(0) = g(0) - \alpha f(0).$$

Следовательно,

$$f(0) = \frac{g(0)}{\alpha - \lambda},$$

$$f(x) = \frac{g(x) - g(0)/(\alpha - \lambda)}{x - \lambda} = \frac{g(x)}{x - \lambda} + \frac{g(0)}{(\alpha - \lambda)(x - \lambda)}.$$

Рассмотрим $\alpha = 2$. Получим, что спектр состоит из $[0, 1] \cup \{2\}$; $\lambda = 2$ – собственное значение. Найдем собственную функцию, отвечающую собственному значению 2:

$$(A - \lambda I) f = 0,$$

$$x f(x) + 2 f(0) = 2 f(x),$$

$$f(x) = \frac{2 f(0)}{2 - x}$$

– собственная функция, отвечающая собственному значению 2.

Задачи. I. В $C[-\pi, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

а) $(Ax)(t) = x(-t)$;

б) $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s + t)\, x(s)\, ds$.

2. В $C[0, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = d^2x/dt^2$, если:

$$\Delta(A) = \{x(t) \in C[0, \pi] \mid x'' \in C[0, \pi],\ x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

3. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Найти спектр и резольвенту.

4. Доказать, что у самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве спектр вещественный и лежит в интервале $[-\|A\|, \|A\|]$.

5. Найти спектр и резольвенту следующих операторов:

а) $(Af)(x) = x^2 f(x) + \int\limits_0^1 x y\, f(y)\, dy,\ f \in L_2[0, 2\pi]$;

б) $(Af)(x)=\cos x\, f(x)+\int_0^{2\pi} f(y)\,dy\,,\quad f\in L_2[0,2\pi]$.

§ 20. Понятие о вполне непрерывном операторе

Гильберт первый обратил внимание на один важный класс операторов, а именно на вполне непрерывные (или компактные) операторы.

Определение I. Определенный всюду в H линейный оператор называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество точек в такое множество, из всякой бесконечной последовательности которого можно выделить сходящуюся подпоследовательность (в предкомпактное в смысле метрики в H).

Утверждение I. Вполне непрерывный оператор ограничен. В противном случае существовала бы последовательность точек f_K, $K=1,2,\dots$, для которой $\|f_K\|=1$, $\|Af_K\|>K$, но из множества $\{Af_K\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Утверждение 2. Если A вполне непрерывен, а линейный оператор B определен всюду в H и ограничен, то операторы AB и BA вполне непрерывны.

Утверждение 3. Если A_1, A_2 – вполне непрерывные операторы, то $\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2$ – тоже вполне непрерывный оператор.

Теорема I. Если A – ограниченный линейный оператор, определенный всюду в H, и если A^*A вполне непрерывен, то и оператор A вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – ограниченная последовательность, такая, что $\{A^*Af_n\}$ сходится (из любой ограниченной, по определению, можно такую выделить),

$$\|Af_n-Af_m\|^2=(A(f_n-f_m),\,A(f_n-f_m))=$$
$$=(A^*A(f_n-f_m),(f_n-f_m))\le\|A^*A(f_n-f_m)\|\cdot\|f_n-f_m\|.$$

Поскольку в правой части неравенства при достаточно больших m и n стоит сколь угодно малое число$(\|f_n-f_m\|\le 2c)$, значит A – вполне непрерывный оператор.

Следствие. Если оператор A вполне непрерывен, то этим же свойством обладает и A^*.

Доказательство. Если оператор A компактный, то и AA^* тоже. Но $AA^*=(A^*)^*A^*$, поэтому из предыдущей теоремы A^* – компактный оператор.

Теорема 2. Оператор A, являющийся пределом (в смысле сходимости по норме в пространстве операторов) вполне непрерывных операторов, вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \varepsilon_i \to 0$. Тогда

$$\exists \{A_{\varepsilon_i}\} : \| A - A_{\varepsilon_i} \| < \varepsilon_i .$$

Пусть M – произвольное ограниченное множество точек $f \in H$, $\|f\| < C$. Пусть $\{f_K\}_1^\infty \subset M$ – произвольная бесконечная последовательность. Выделим из этой последовательности подпоследовательность, $\{f_{1,K}\}_1^\infty$, которая оператором A_{ε_1} переводится в сходящуюся последовательность. Из $\{f_{1,K}\}_1^\infty$ выделим $\{f_{2,K}\}_1^\infty$, которая оператором A_{ε_2} переводится в сходящуюся последовательность, и т.д.

Рассмотрим диагональную последовательность $\{f_{K,K}\}_1^\infty$. Докажем, что эта последовательность переводится оператором A в сходящуюся. Она переводится в сходящуюся каждым из операторов A_{ε_i}. Заметим, что

$$\| A f_{n,n} - A f_{m,m} \| \le \| (A - A_{\varepsilon_K}) f_{n,n} \| + \| (A - A_{\varepsilon_K}) f_{m,m} \| +$$
$$+ \| A_{\varepsilon_K} f_{n,n} - A_{\varepsilon_K} f_{m,m} \| \le 2C\varepsilon_K + \| A_{\varepsilon_K}(f_{n,n} - f_{m,m}) \| .$$

Выбирая достаточно большим сначала K, а затем m и n, мы сделаем правую часть неравенства сколь угодно малой. Следовательно, $\{A f_{n,n}\}$ сходится.

§ 21. Компактные операторы в гильбертовом пространстве

Рассмотрим некоторые свойства собственных значений и собственных векторов компактных операторов в гильбертовом пространстве H, аналогичные соответствующим свойствам конечномерных операторов.

Утверждение 1. Если A – самосопряженный оператор и λ – его собственное число, то $\lambda \in R$.

Доказательство:

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow (Ax, x) = \lambda (x, x) = (x, Ax) =$$
$$= \bar{\lambda} (x, x) \Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in R .$$

Утверждение 2. Пусть λ и μ – собственные числа, соответствующие собственным векторам φ и ψ ($\lambda \ne \mu$) самосопряженного оператора A. Тогда φ и ψ – ортогональны.

Доказательство: $A\varphi=\lambda\varphi$, $A\psi=\mu\psi$. Поэтому

$$(A\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)=(\varphi,A\psi)=\mu(\varphi,\psi).$$

Отсюда $(\varphi,\psi)=0$, поскольку $\lambda\neq\mu$.

Теорема I (Гильберта - Шмидта). Для любого компактного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом пространстве H существует ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, такая, что каждый элемент $\xi\in H$ записывается единственным образом в виде

$$\xi=\sum_k c_k\varphi_k+\xi',$$

где $\xi'\in \operatorname{Ker} A$, при этом

$$A\xi=\sum_k \lambda_k c_k\varphi_k,$$

и, если система $\{\varphi_n\}$ бесконечна, то $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

Задачи.

I. Какие из следующих операторов являются вполне непрерывными, $A: C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$:

а) $(Ax)(t)=t\,x(t)$;

б) $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$;

в) $(Ax)(t)=x(0)+t\,x(1)$;

г) $(Ax)(t)=\int\limits_0^1 e^{ts}x(s)\,ds$;

д) $(Ax)(t)=x(t^2)$.

2. Доказать, что оператор $A: L_2[a,b]\longrightarrow L_2[a,b]$,

$$(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau,$$

вполне непрерывен.

3. Доказать, что $A: L_2[0,+\infty)\longrightarrow L_2[0,+\infty)$,

$$(Af)(x)=\int\limits_0^\infty\frac{f(y)}{1+x^2+y^2}\,dy,$$

является вполне непрерывным.

4. Доказать, что оператор

$$A: L_2[-1,1]\longrightarrow L_2[-1,1],$$

$$(Ax)(s)=\int\limits_{-1}^1 s^2 t\,x(t)\,dt,$$

вполне непрерывен, и найти его спектр.

5. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(s) = \int_0^1 st(1-st)\,x(t)\,dt,$$

вполне непрерывен, и найти его спектр.

6. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t) = t\,x(t),$$

самосопряжен, и найти его спектр.

§ 22. Интегральные уравнения. Основные определения. Интегральные уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма

I. Основные определения. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральным уравнением называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла. Рассмотрим классификацию интегральных уравнений.

I. Уравнение вида

$$\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

где $\varphi(t)$ - неизвестная функция, называется уравнением Фредгольма первого рода.

2. Уравнение вида

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

называется уравнением Фредгольма второго рода.

3. Уравнение вида

$$\int_a^s f(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

называется уравнением Вольтерра первого рода.

4. Уравнение вида

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s,t)\,\varphi(t)\,dt + f(s)$$

называется уравнением Вольтерра второго рода.

Уравнения Вольтерра можно рассматривать как уравнения Фредгольма, в которых $K(s,t)=0$ при $t>s$, однако, в силу особых свойств, их выделяют в отдельный класс.

Рассмотрим подробнее уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{I8}$$

Предположим, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2\, ds\, dt < \infty . \qquad (19)$$

Такие ядра $K(s,t)$ уравнения (18), удовлетворяющие условию (19), называют ядрами Гильберта – Шмидта.

Исследование уравнения (18) сводят к исследованию операторов

$$(A\varphi)(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

называемых операторами Гильберта – Шмидта.

Теорема 1. Оператор

$$(A\varphi)(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

с ядром Гильберта – Шмидта (19) является компактным.

2. Теоремы Фредгольма для уравнений с вырожденными ядрами. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt + f(s), \qquad (20)$$

ядро которого вырожденное, т.е. имеет вид

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\, Q_i(t), \qquad (21)$$

где $P_i,\ Q_i \in L_2[a,b]$.

Оператор с ядром вида (21) переводит всякую функцию $\varphi \in L_2$ в элемент конечномерного пространства, порожденного функциями $P_i,\ i = 1,\dots,n$:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt .$$

Будем считать, что $P_i(s)$ – линейно независимые функции. Из (20)

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) .$$

Пусть

$$q_i = \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt .$$

Тогда

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i(s) + f(s) .$$

Подставив выражение для φ в (20), получим

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i(s) + f(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(s). \qquad (22)$$

Введем

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(t) P_j(t)\, dt, \quad b_i = \int_a^b Q_i(t) f(t)\, dt.$$

Тогда из (22)

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \right].$$

Так как P_i линейно независимы,

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (23)$$

Из условий существования и единственности решения системы (23) получаем теоремы Фредгольма для вырожденных ядер:

I. Система линейных алгебраических уравнений

$$Tx = y \ (T = I - A,\ x = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$y = (y_1, \ldots, y_n))$$

разрешима тогда и только тогда, когда вектор y ортогонален каждому решению сопряженной однородной системы

$$T^* z = 0 \ (T^* = I - A^* = I - \bar{A}^T).$$

II (альтернатива Фредгольма). Если $\det T \neq 0$, то уравнение $Tx = y$ имеет при любом y одно и только одно решение. Если же $\det T = 0$, то однородное уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевые решения.

III. Однородные системы $Tx = 0$ и $T^* z = 0$ имеют одно и то же число линейно независимых решений.

3. Теоремы Фредгольма для уравнений с произвольными ядрами. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt + f(s)$$

с ядром Гильберта – Шмидта. Запишем это уравнение в виде $\varphi = A\varphi + f$. Пусть $T = I - A$. Тогда верны теоремы Фредгольма (сравните со случаем вырожденных ядер):

I. Неоднородное уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения $T^* \psi_0 = 0$.

II (альтернатива Фредгольма). Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом $f \in H$ одно и только одно решение, либо однородное уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.

III. Однородные уравнения $T\varphi_0 = 0$ и $T^*\psi_0 = 0$ имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.

Задачи. 1. Пусть $f \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (1 + \alpha x y) f(y)\, dy = x^2 .$$

Найти, при каких α уравнение разрешимо, и решить его.

2. Пусть $f \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (x + \alpha y^2) f(y)\, dy = 1 + \beta x .$$

Найти такое β, чтобы это уравнение было разрешимо при любом α.

3. Пусть $f \in L_2[0,1]$,

$$f(x) + \int_0^1 (x + y^2 + \alpha) f(y)\, dy = 1 + \beta x^2 .$$

Найти такое β, чтобы уравнение было разрешимо при любом α.

4. Найти решение уравнения

$$f(x) + \int_0^x f(t)\, dt = x^2$$

в пространстве $L_2[0,1]$.

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

§ 23. Спектральная теорема

1. Спектральная теорема для симметричного оператора в n-мерном пространстве. В конечномерном пространстве линейный оператор A, заданный матрицей $\{a_{ik}\}$, не обязательно симметричной, имеет хотя бы одно собственное значение. В общем случае ничего большего утверждать нельзя: например, оператор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

имеет единственное собственное значение $\mu = 1$, притом простое, т.е. размерность отвечающего ему собственного подпространства равна единице.

Но если матрица эрмитова ($a_{ik} = \overline{a_{ki}}$), или, что то же, $(Af, g) = (f, Ag)$ $\forall f, g \in R^n$, то существует n собственных векторов

$$f_i = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}),\ i = 1, \dots, n,$$

соответствующих собственным значениям λ_i. Эти собственные векторы можно выбрать ортонормированными. Взяв их в качестве базиса и разложив f по базису, получим

$$(Af,f)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\overline{g_i}\,\overline{g_k}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{\alpha}_k\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|\alpha_k|^2,$$

где $f=(g_1,\ldots,g_n)$.

Имея в виду обобщения, получим этот результат в иной форме. Пусть $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p$ $(p\le n)$ – собственные числа. Пусть H_{λ_i} – собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному числу λ_i, $1\le i\le p$. Если A – симметрический, то при $\lambda_i\ne\lambda_k$ $H_{\lambda_i}\perp H_{\lambda_k}$. Кроме того, $R^n=H_{\lambda_1}\oplus H_{\lambda_2}\oplus\ldots$ $\ldots\oplus H_{\lambda_p}$, $p\le n$. Положим $H(\lambda_i)=\sum\limits_{j=1}^{i}\oplus H_{\lambda_j}$. Тогда можно записать, что

$$H=\sum_{i=1}^{n}\oplus[H(\lambda_i)-H(\lambda_{i-1})],\quad H(\lambda_0)=\{0\}.$$

Подпространства $H(\lambda_i)$ образуют возрастающую последовательность подпространств:

$$\{0\}=H(\lambda_0)\subset H(\lambda_1)\subset\ldots\subset H(\lambda_p)=H.$$

Обозначив через $E(\lambda_i)$ оператор ортогонального проектирования на $H(\lambda_i)$, получим

$$0=E(\lambda_0)<E(\lambda_1)<\ldots<E(\lambda_p)=E.$$

Пусть E_{λ_i} – оператор проектирования на

$$H_{\lambda_i}=H(\lambda_i)\ominus H(\lambda_{i-1}),\quad E_{\lambda_i}=E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1}).$$

Тогда в терминах проекционных операторов разложение

$$H=\sum_{i=1}^{p}\oplus[H(\lambda_i)\ominus H(\lambda_{i-1})]$$

можно записать в виде

$$E=\sum_{i=1}^{p}[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})].$$

Поскольку E_{λ_i} является оператором проектирования на собственное подпространство H_{λ_i}, то

$$AE_{\lambda_i}f=\lambda_i E_{\lambda_i}f\quad\forall f\in H;\ AE_{\lambda_i}=\lambda_i E_{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$A=A\sum_{i=1}^{p}E_{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i E_{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})].\tag{24}$$

Так как

$$E_{\lambda_i} E_{\lambda_k} = E_{\lambda_k} E_{\lambda_i} = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ E_{\lambda_k}, & i = k, \end{cases}$$

$$A^m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^m E_{\lambda_i} .$$

Следовательно, многочлен степени m от оператора A может быть записан в виде

$$P(A) = \sum_{i=1}^{p} p(\lambda_i) E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} p(\lambda_i) [E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})] .$$

Подобные формулы имеют место в случае произвольного симметрического оператора в гильбертовом пространстве.

Формула (24) называется спектральным разложением симметрического оператора A в R^n, ее можно переписать в виде

$$(A f, g) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, (\Delta_i E(\lambda) f, g) \qquad \forall f, g \in H,$$

$$(\Delta_i E(\lambda) f, g) = (E(\lambda_i) f, g) - (E(\lambda_{i-1}) f, g)$$

Получим спектральную теорему.

Теорема I. Всякому симметрическому оператору A в конечномерном пространстве R^n можно поставить в соответствие некоторое семейство проекционных операторов

$E(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $p \leq n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$

– собственные числа оператора A, которое обладает следующими свойствами:

а) $E(\lambda_i) \leq E(\lambda_j)$ при $\lambda_i \leq \lambda_j$;

б) $E(\lambda_p) = E$, $E(\lambda_0) = 0$;

в) с помощью $E(\lambda_i)$ оператор представим в виде

$$A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i [E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E(\lambda),$$

где интеграл символически обозначает сумму, стоящую справа.

2. Спектральная теорема для симметрического вполне непрерывного оператора. Пользуясь теоремой Гильберта – Шмидта (см. § 21), несложно обобщить теорему I из п. I.

Теорема 2. Всякому симметрическому вполне непрерывному оператору A в H можно поставить в соответствие некоторое семейство проекционных операторов $E(\lambda)$, зависящее от действительного параметра λ, которое обладает свойствами:

а) $E(\lambda) \le E(\mu)$ при $\lambda \le \mu$;

б) $E(\lambda+0) = E(\lambda)$;

в) $E(\lambda)=0$ при λ, меньшем наименьшего собственного числа оператора; $E(\lambda)=E$ при λ, большем наибольшего собственного числа оператора.

С помощью $E(\lambda)$ оператор представим в виде

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\, E(\lambda).$$

В общем случае ограниченного симметрического оператора имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Всякому симметрическому оператору A в H, имеющему нижнюю грань m и верхнюю грань M, можно поставить в соответствие единственное семейство проекционных операторов $E(\lambda)$, зависящее от действительного параметра λ, $\lambda \in [m, M]$, которое обладает свойствами:

а) $E(\lambda) \le E(\mu)$ при $\lambda \le \mu$;

б) $E(\lambda+0) = E(\lambda)$;

в) $E(\lambda)=0$ при $\lambda < m$ и $E(\lambda)=E$ при $\lambda \geqslant M$.

С помощью $E(\lambda)$ оператор A представляется в виде

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\, E(\lambda) = \int_{m-0}^{M} \lambda \, d\, E(\lambda).$$

§ 24. Спектр и возмущения самосопряженных операторов

I. Теоремы Вейля и Неймана о вполне непрерывных возмущениях.

Теорема I. Если к самосопряженному оператору A прибавить вполне непрерывный самосопряженный оператор K, то непрерывный спектр оператора A не изменится, т.е.

$$\sigma(A+K) = \sigma(A).$$

Устанавливая, что вполне непрерывное возмущение оператора не меняет его непрерывного спектра, теорема I ничего не утверждает о характере изменения точечного спектра $\mathfrak{D}(A)$.

О том, насколько существенным может быть это изменение, говорит следующая теорема, принадлежащая Нейману.

Теорема 2. К любому самосопряженному оператору A, действующему в сепарабельном гильбертовом пространстве, можно прибавить самосопряженный оператор K, не только вполне непрерывный, но даже имеющий сколь угодно малую абсолютную норму, и такой, что система всех собственных векторов оператора $A+K$ будет полной в H.

Под абсолютной нормой понимается выражение вида

$$N(A)=\sqrt{\sum_{k,i=1}^{n}|(Af_k,\varphi_i)|^2},$$

где f_k,φ_i – произвольные ортонормированные базисы.

Можно показать, что $N(A)$ не зависит от выбора базисов $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{\varphi_i\}_1^\infty$.

При рассмотрении теоремы I возникает вопрос: что можно сказать о "близости" двух ограниченных самосопряженных операторов A и B, если их непрерывные спектры совпадают? Легко убедиться на простых примерах в том, что разность $(A-B)$ таких операторов может не быть вполне непрерывным оператором. Таким образом, теорема, обратная теореме I, невозможна. Однако справедлива следующая, установленная Нейманом теорема.

Теорема 3. Если пространство H сепарабельно и A, B – ограниченные самосопряженные операторы в нем с одним и тем же непрерывным спектром, то найдется унитарный оператор U, такой, что оператор $K=B-UAU^{-1}$ будет вполне непрерывным.

2. Абсолютно непрерывная и сингулярная части спектра. В этом пункте нам понадобится следующее определение.

Определение. Функция f, заданная на некотором отрезке $[a,b]$, называется абсолютно непрерывной на нем, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$, такое, что для любой системы попарно непересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=1,\dots,n$,

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon,$$

если

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta.$$

Пусть A – самосопряженный оператор, а E_t – его спектральная функция. Элемент $f\in H$ назовем регулярным относительно A, если функция $\sigma(t,f)=(E_tf,f)$ абсолютно непрерывна, и сингулярным, если абсолютно непрерывная часть функции $\sigma(t,f)$ равна нулю.

Множество всех регулярных относительно A элементов обозначим H_α, а множество всех сингулярных элементов H_s.

Теорема 4. Множества H_α и H_s являются подпространствами H, они взаимно ортогональны и $H_\alpha + H_s = H$.

Теорема 5. Подпространства H_α и H_s приводят оператор A.

Часть A_α оператора A, действующая в подпространстве H_α регулярных элементов, называется абсолютно непрерывной частью оператора A, а спектр $\mathcal{G}(A_\alpha)$ оператора A_α называется абсолютно непрерывной частью спектра оператора A.

Часть A_s, действующая в подпространстве H_s сингулярных элементов, называется сингулярной частью оператора A, а ее спектр $\mathcal{G}(A_s)$ – сингулярной частью спектра оператора A.

Собственные значения, которые все входят в $\mathcal{G}(A_s)$, образуют дискретную компоненту сингулярной части спектра оператора A. Дополнение этой компоненты до всего $\mathcal{G}(A_s)$ называется непрерывной компонентой сингулярной части спектра A.

3. Инвариантность абсолютно непрерывной части спектра относительно конечномерных возмущений.

Теорема 6. Пусть A – произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, а K – произвольный конечномерный самосопряженный оператор в нем. Тогда абсолютно непрерывные части A_α и B_α операторов A и $A+K$ унитарно эквивалентны, в частности

$$\mathcal{G}(B_\alpha) = \mathcal{G}(A_\alpha).$$

Примеры. I. Пусть

$$(Ax)(t) = a(t)\,x(t), \quad A: L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b],$$

$$(Bx)(t) = a(t)\,x(t) + x(0),$$

$$(B - \lambda E)x = g, \quad (a(t)-\lambda)\,x(t) + x(0) = g(t),$$

$$x(0) = \frac{g(0)}{a(0)-\lambda-1},$$

$$x(t) = \frac{g(t)-x(0)}{a(t)-\lambda} = \frac{g(t)}{a(t)-\lambda} - \frac{g(0)}{(a(t)-\lambda)(a(0)-\lambda+1)}.$$

Получаем, что непрерывный спектр у A и B совпадает.

2. Пусть

$$(Ax)(t) = a(t)\,x(t),$$

$$(Bx)(t) = a(t)\,x(t) + t\int_0^1 x(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$(a(t)-\lambda)\, x(t) + t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau = g(t),$$

$$x(t) = \frac{g(t)}{a(t)-\lambda} - \frac{\int_0^1 x(\tau)\, d\tau}{(a(t)-\lambda)} = \frac{g(t) - c_x}{a(t)-\lambda},$$

$$c_x = \int_0^1 \frac{g(t)\, dt}{a(t)-\lambda} - c_x \int_0^1 \frac{t\, dt}{a(t)-\lambda},$$

$$c_x = \frac{\int_0^1 \frac{g(t)\, dt}{a(t)-\lambda}}{1 + \int_0^1 \frac{t\, dt}{a(t)-\lambda}}.$$

Мы видим, что непрерывный спектр не изменился.

Литература

I. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, I98I.

2. Садовничий В.А. Теории операторов. М.: Изд-во Моск. ун-та, I979.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, I980.

4 Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, I984.

5. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов. М.: Наука, I966.

Редакция заказной литературы

Андрей Олегович Голосов
Олег Степанович Нарайкин
Павел Васильевич Храпов

Прикладной функциональный анализ

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская
Редактор Е.К.Кошелева
Корректор Ю.Н.Хлебинский

Подписано в печать 18.09.90. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 2.
Печ.л. 4,75. Усл.печ.л. 4,42. Уч.-изд.л. 4,05. Тираж 500 экз.
Заказ 962 Цена 15 коп. Изд. № 2.

Издательство МГТУ, типография МГТУ.
107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.