1 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ

1.1 СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В различные исторические периоды развития человечества для подсчетов и вычислений использовались различные способы представления чисел.

Совокупность приемов и правил наименования и обозначения чисел, с помощью которых можно установить взаимно однозначное соответствие между любым числом и его представлением в виде конечного числа символов называют СИСТЕМОЙ СЧИСЛЕНИЯ.

Существуют различные системы счисления. Примеры:

Счет предметов с помощью палочек:

| | | | | | | | | | | | = 12 = XII

ДВЕНАДЦАТЕРИЧНАЯ система: английская система мер:

1 фут = 12 дюймов

1 шиллинг = 12 пенсов

ШЕСТИДЕСЯТЕРИЧНАЯ система: Вавилон

1 час = 60 минут; 1' = 60"

1° = 60' ; 1' = 60"

ДЕСЯТИЧНАЯ система - возникла в Индии, перенесена в Европу арабами, получила название арабской.

Возьмем для примера десятичное число 12 и посмотрим, каким образом оно получается в десятичной системе счисления:

"Две - на - дцать"

$12 = 1 * 10^1 + 2 * 10^0 = 12$

где положение чисел 1 и 2 определяется степенью числа 10.

Аналогично: $453 = 4 * 10^2 + 5 * 10^1 + 3 * 10^0 = 400 + 50 + 3$

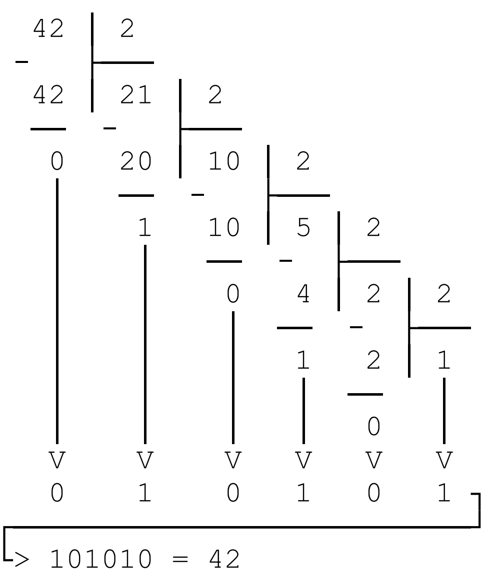
Истинное значение каждой цифры определяется ее местом в числе, т.е. степенью числа 10 - основанием системы счисления.

Система счисления, в которой значение цифры в числе определяется ее местоположением (позицией), называется ПОЗИЦИОННОЙ.

В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ основанием является число 2. В этом случае для записи чисел используют всего две цифры: 0 и 1. Возьмем, например, число 12 и разложим его по степеням 2.

Получим: $12 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0$

Число 12 в двоичной системе запишется как: $1100_2 = 12_{10}$



Перевод числа из десятичной в двоичную производится методом последовательного деления числа на 2 до тех пор, пока частное от деления не станет равным 1. Число в двоичной системе записывается в виде остатков от деления, начиная с последнего частного, справа налево:

Дробная часть представляется суммой отрицательных степеней числа 2. Например, $0.25 = 2^{-2}$.

$0.8125_{10} = 0.5+0.25+0.0625 = 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 0*2^{-3} + 1*2^{-4} = 0.1101_2$

При переводе дробей в двоичный код в большинстве случаев результат получается приблизительный, поэтому необходимо задавать точность преобразования с нужным количеством знаков после запятой.

Преимуществом двоичной системы счисления является то, что она использует только две цифры. Поэтому в цифровой технике для представления логических сигналов и выполнения операций над числами в двоичной системе счисления достаточно двух значений напряжения, соответствующих уровням логического нуля и логической единицы. Микропроцессорные устройства оперируют с информацией, представляемой комбинацией двоичных цифр – **битов** (могут принимать значения 0 или 1). Группы битов называют словами. Длина слова – разрядность различна и может составлять 4, 8, 16, 32 и более битов. Слово разрядностью 8 бит называют **байтом.** Диапазон представления чисел одним байтом составляет от 0 до $2^8 - 1$, т.е. всего 256 значений.

При необходимости представления двоичных чисел со знаком старший разряд отводится для знака числа (0 – число положительное, 1 – отрицательное). В этом случае диапазон представления однобайтных чисел составляет от -127 до +127.

При написании программ на языках низкого уровня или в кодах МП и при обработке данных широко используются еще две системы счисления.

ВОСЬМЕРИЧНАЯ система в качестве основания использует число 8 и, соответственно, 8 цифр от 0 до 7. Перевод из десятичной системы в восьмеричную осуществляется по тому-же правилу, что и в случае с двоичной системой. Перевести число из двоичной в восьмеричную систему еще проще. Надо число, представленное в двоичном виде, сгруппировать справа налево по три цифры и каждую группу отдельно перевести по правилу перевода из двоичной системы в десятичную. Обратное преобразование - в обратном порядке. Например:

число 453_{10} = $111'000'101_{2}$ = 705_{8}

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ система в качестве основания использует число 16 и, соответственно, цифры от 0 до 9 и первые 6 букв латинского алфавита A, B, C, D, E, F. При переводе числа из двоичной системы в шестнадцатеричную надо число, представленное в двоичном виде, сгруппировать справа налево по четыре цифры и каждую группу отдельно перевести по правилу перевода из двоичной системы в десятичную. Например:

число 453_{10} = $1'1100'0101_{2}$ = $1C5_{16}$ = 1C5h = 0x1C5

ДВОИЧНО-ДЕСЯТИЧНАЯ система применяется в тех случаях, когда результат необходимо представить в удобном для восприятия человеком виде (на цифровом индикаторе, ЦПУ и др.). При этом каждая цифра десятичного числа отдельно переводится в двоичный код, причем результат представляется в четырех разрядах и при необходимости дополняется нужным количеством нулей. Окончательный результат получается при записи полученных двоичных чисел подряд, в том порядке, какой был в десятичном числе. Например:

$$\text{число } 453_{10} = \overset{4}{0100}'\overset{5}{0101}'\overset{3}{0011}_{2-10}$$

1.2 ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

СЛОЖЕНИЕ чисел, представленных в двоичном коде, выполняется поразрядно, начиная с младшего разряда. В результате сложения двух первых кодов слагаемых Ao, Bo получается первый разряд суммы So и код переноса Co в следующий разряд. В следующих разрядах код Si будет определяться с учетом переноса из соседнего младшего разряда:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\,5 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0111 \\ +\,0101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

ОПЕРАЦИЯ ВЫЧИТАНИЯ в ЭВМ выполняется так же как и сложение, но при этом отрицательные числа представляются в дополнительном или обратном коде. Смысл перевода отрицательных чисел из прямого в дополнительный и обратный коды поясним на примере с десятичными числами.

Допустим, требуется сложить числа X1=76 и X2=-58. Заменим код отрицательного слагаемого X2 его дополнением до 100, так чтобы [X2]доп=100+X2=42. Сложив числа X1+[X2]доп получим:

Y=X1+[X2]доп=76+42=118

Отбрасывая 1 старшего разряда получим искомый результат 18. Равенство полученного результата истинному объясняется тем, что при формировании дополнительного кода к X2 мы прибавляли 100, а из результата вычитали 100 отбрасыванием старшего разряда.

Y=X1+[X2]доп-100=X1+[X2+100]-100=76+[-58+100]-100=18

При записи двоичного числа в ПРЯМОМ коде в знаковом разряде ставится его знак (0 - плюс, 1 - минус), а само число записывается в естественной форме:

$X=13_{10}$ $[X]пр=01101_2$

$X=-13_{10}$ $[X]пр=11101_2$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД отрицательных двоичных чисел получается заменой двоичных кодов во всех разрядах на взаимно обратные (0 на 1, 1 на 0). После этого к младшему разряду числа добавляется 1. В знаковом разряде отрицательного числа записывается 1.

[-14]доп=[-01110]доп=[10001+1]=10010

Кроме дополнительного кода для представления отрицательных чисел используется ОБРАТНЫЙ КОД. В этом случае в знаковом разряде записывается 1, а в остальных разрядах цифры заменяются на взаимно обратные

[-14]обр=[-01110]обр=10001

При выполнении арифметических операций с отрицательными числами производится поразрядное сложение слагаемых, начиная с младшего и кончая знаковым разрядом. Если используется дополнительный код, то возможная единица переноса из знакового разряда отбрасывается, при использовании обратного кода единица переноса знакового разряда суммируется с младшим разрядом полученной суммы. Результат вычисления получается в том коде, в каком были представлены слагаемые. Положительные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах имеют одну и ту же форму записи. Например:

```
      12      X1пр=0.1100     X1обр=0.1100     X1доп=0.1100
       5      X2пр=0.0101     X2обр=1.1010     X2доп=1.1011
  -  ----  -  -----------  +  ------------  +  ------------
       7      Sпр= 0.0111          10.0110          10.0111

                              Sобр= 0.0111     Sдоп= 0.0111

      Y=5-12=-7               X1обр=0.0101     X1доп=0.0101
                              X2обр=1.0011     X2доп=1.0100
                           +  ------------  +  ------------
                              Sобр= 1.1000     Sдоп= 1.1001
                              Sпр= -0.0111     Sпр= -0.0111
```

УМНОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ, представленных в форме с фиксированной точкой, включает в себя определение знака и абсолютного значения произведения. Знаковый разряд произведения может быть получен суммированием знаковых разрядов сомножителей без формирования переноса (так называемое суммирование по модулю 2). Действительно, при совпадении цифр знаковых разрядов сомножителей (0 и 0, либо 1 и 1) их сумма по модулю 2 равна 0, т.е. соответствует знаковому разряду произведения двух сомножителей, имеющих одинаковые знаки; при несовпадении цифр знаковых разрядов эта сумма будет равна 1, что также соответствует знаковому разряду произведения двух сомножителей с разными знаками. Абсолютное значение произведения получается путем перемножения чисел без учета их знаков (так называемого кодового умножения).

Пусть производится умножение чисел $13_{10} = 1101_2$ и $11_{10} = 1011_2$

```
      13           1101
     X            X
      11           1011
    ----         ------
      13           1101
    +            +  1101
     13            0000
    ----          1101
     143        ---------
                10001111
```

Как видно из примера, в процессе выполнения операции умножения формируются частичные произведения (произведения множимого на цифры разрядов множителя), которые суммируются с соответствующими сдвигами друг относительно друга. В цифровых устройствах процессу суммирования частичных произведений придают последовательный характер: формируется одно из частичных произведений, к нему с соответствующим сдвигом прибавляется следующее частичное произведение, к полученной сумме прибавляется с соответствующем сдвигом очередное частичное произведение и т.д., пока не окажутся просуммированными все частичные произведения. Этот процесс суммирования можно начинать с младшего либо старшего частичного произведения.

При умножении целых чисел для фиксации произведения в разрядной сетке должно предусматриваться число разрядов, равное сумме числа разрядов множимого и множителя.

ДЕЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ. Будем рассматривать операцию алгебраического деления чисел, представленных в форме с фиксированной точкой. при этом выполнение операции содержит действия, связанные с определения модуля частного. Знак частного может быть найден тем же приемом, что и знак произведения в рассмотренной выше операции умножения с отделением знаковых разрядов. На рисунке показана схема алгоритма нахождения частного положительных чисел a и b.

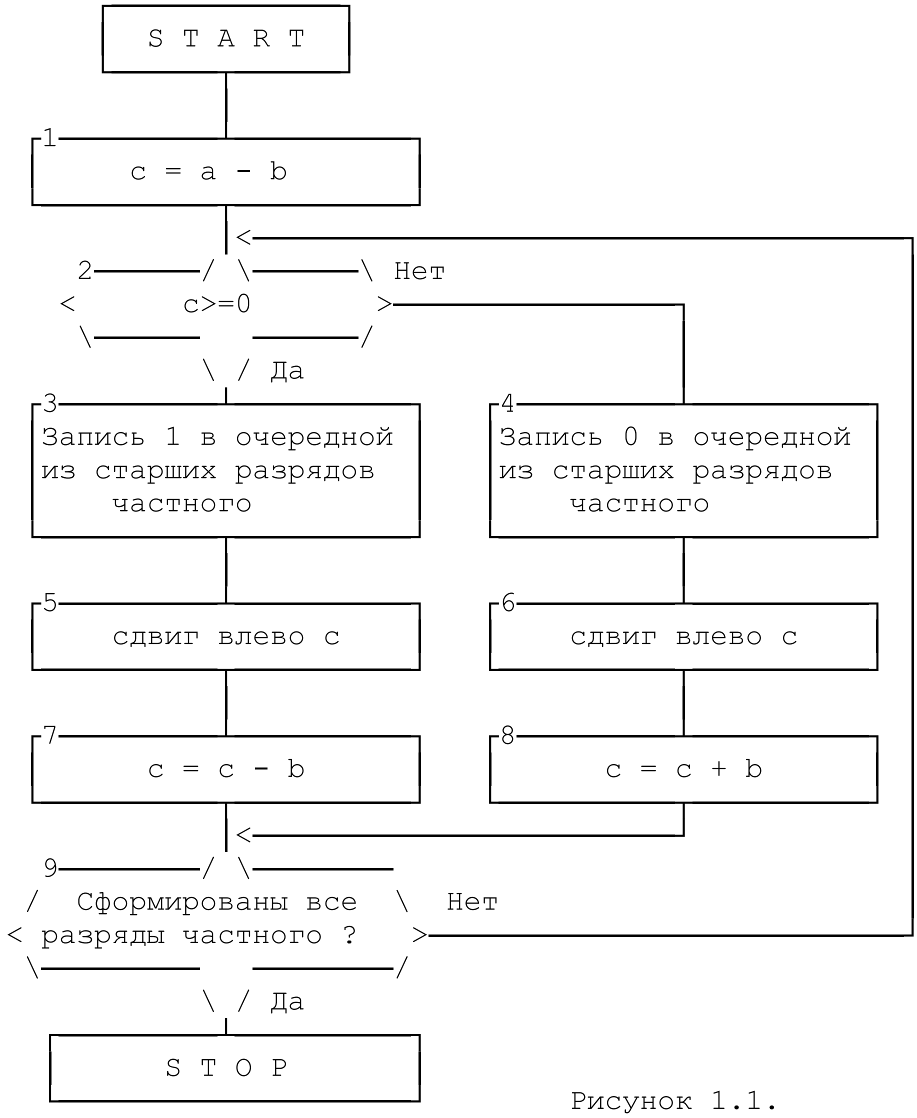


Рисунок 1.1.

Покажем выполнение операции на примере. Пусть после отделения знаковых разрядов модули делимого и делителя представляются соответственно числами a=0.10010 и b=0.10110.

Встречающуюся в алгоритме операцию вычитания числа заменим прибавлением числа -b, представленного в дополнительном коде: (-b)доп=1.01010.

a	0.10010		0. 1 0 1 1 0
(-b)доп	1.01010		———————————
+	———————		0. 1 1 0 1 0 Частное
c	1.11100	c < 0	
Сдвиг влево	1.11000		
b	0.10110		
+	———————		
c	0.01110	c > 0	
Сдвиг влево	0.11100		
(-b)доп	1.01010		
+	———————		
c	0.00110	c > 0	
Сдвиг влево	0.01100		
(-b)доп	1.01010		
+	———————		
c	1.10110	c < 0	
Сдвиг влево	1.01100		
b	0.10110		
+	———————		
c	0.00010	c > 0	
Сдвиг влево	0.00100		
(-b)доп	1.01010		
+	———————		
c	1.01110	c < 0	

Проверка: $a=0,10010_2 = 0,5625_{10}$

$b=0,10110_2 = 0,6875_{10}$

$a/b=0,11010_2 = 0,8125_{10}$